

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

lancio di lava in grandi massi e brandelli incandescenti a grandissima altezza; altre forti esplosioni a 4^h 53^m, 4^h 54^m, 8^h 48^m; dall'11 al 20 fumo, lapillo e lava abbondante in colata con detonazioni frequenti; dal 21 al 31, soltanto fumo bianco o nero, lapillo, cenere con detonazioni e deboli boati.

In gennaio 1916, il giorno 6, a 7^h 37^m, una fortissima esplosione ed eruzione a grande altezza di blocchi di lava, lapillo, cenere e fumo nero, ed altre esplosioni nella giornata. Dal 24 al 31 durante la notte si sono osservate eruzioni di piccoli massi incandescenti, lapillo e poca cenere.

In febbraio vi fu eruzione soltanto di fumo biancastro, talvolta nero, di piccoli e scarsi massi di lava incandescenti; e così fino alla fine del mese.

Dunque, l'efflusso della lava in colata più o meno abbondante durò effettivamente fino al 20 dicembre 1915; dopo, la lava fu eruttata soltanto di quando in quando ed in brandelli incandescenti e massi isolati, ed il vulcano riprese il suo modo ordinario di funzionare.

Termodinamica. — Sulla legge di Poisson in relazione al primo principio di termodinamica, in risposta al prof. Guglielmo.

Nota del Corrispondente prof. GUIDO GRASSI.

Non posso lasciare senza risposta la Nota pubblicata in questi Rendiconti (2° fascicolo, 1° semestre 1916) dal prof. Guglielmo, poichè in essa l'autore combatte recisamente quanto io avevo affermato in una mia precedente Nota (7° fascicolo, 1° semestre 1915 di questi Rendiconti) relativamente alla cosiddetta formola di Poisson, o di Laplace, che esprime la legge delle trasformazioni adiabatiche dei gas; e cioè che la dimostrazione di quella formola va considerata come indipendente dal principio dell'equivalenza.

Dice il prof. Guglielmo che io non ho tenuto conto dell'autorevole parere di Van der Waals e Kohnstamm, i quali dichiarano che nel ragionamento col quale Poisson ha ottenuto la formola, deve esser contenuta in qualche modo la legge della conservazione dell'energia. Poi ricorda che Clausius e tutti i migliori autori di trattati di termodinamica deducono la formola dal primo principio. Afferma infine che anch'io, senza accorgermene, ho fatto lo stesso, e conclude: nè poteva essere altrimenti.

Io osservo, anzitutto, che avendo, secondo il mio modo di vedere, una prova diretta che la formola di Poisson si dimostra senza ricorrere affatto al primo principio, non avevo bisogno di preoccuparmi più dei dubbj che qualche autore aveva potuto sollevare. Non credevo poi di mancare di rispetto nè a Clausius, nè agli altri autori citati dal prof. Guglielmo, perchè quegli autori non affermano ciò che sostiene il Guglielmo, non dicono che la via da loro seguita sia l'unica possibile, e che sia indispensabile presupporre la legge della equivalenza per giungere alla formola di Poisson.

Unica eccezione sarebbe il Van der Waals, ma anche questa soltanto in forma dubitativa.

Ora l'opinione di questo autore, non solo non appare appoggiata a validi argomenti, ma fa nascere spontanea la domanda: Perchè non ha sottoposto la dimostrazione di Poisson ad un esame accurato e non ha ricercato la spiegazione di quanto afferma, la soluzione del suo dubbio?

Io d'altronde sapevo benissimo che nello scritto del Poisson non si trova alcun accenno al primo principio che abbia potuto influire sul procedimento dimostrativo della formola; non avevo, ripeto, alcun motivo di dubitare del mio giudizio, perchè trovavo la cosa naturalissima.

D'altronde, lo dice lo stesso prof. Guglielmo, il Van der Waals non dà alcuna spiegazione; e, per conto mio, credo che sia rimasto ingannato dal procedimento seguito da molti autori per dimostrare la formola di Poisson, procedimento che ha l'apparenza di far discendere la detta formola da quelle che esprimono la 1^a legge di termodinamica. Ma anche su di ciò io avevo già richiamato l'attenzione del prof. Guglielmo nella mia Nota precedente, avvertendo che quella dipendenza era soltanto apparente.

Riprenderò in esame ordinatamente i vari punti della questione sollevata dal Guglielmo.

La dimostrazione data dal Poisson è inesatta; ciò fu già dimostrato. Veramente ho trovato un autore, il Von Lang, che nella sua opera, d'altronde pregevolissima, *Einleitung in die theoretische Physik*, § 301, riproduce la dimostrazione di Poisson senza avvertirne la inesattezza. Ma lo Jamin, per esempio, l'aveva dichiarato nettamente nel suo *Cours de Physique*, senza però spiegare dove sia l'errore, poichè un trattato come il suo non era la sede opportuna per una discussione di questo genere. È presumibile che tutti coloro che si sono occupati di termodinamica, e hanno letto il Poisson, abbiano rilevato l'errore.

Questo errore consiste essenzialmente nell'aver considerato le espressioni $\frac{dq}{dp}$ e $\frac{dq}{dv}$ come derivate parziali, mentre noi oggi sappiamo che non lo sono, e sappiamo ciò appunto perchè siamo venuti a conoscere il principio della equivalenza; e nei trattati di termodinamica si procura sempre di mettere in evidenza che, in forza di questo principio, quella quantità che si chiama la variazione di calore, il dq , non è un differenziale esatto.

Il Poisson non conosceva il principio dell'equivalenza; non poteva quindi introdurlo nelle sue equazioni e non ve l'ha introdotto, neppure senza saperlo, come vorrebbe il prof. Guglielmo; perchè il Poisson ha continuato, sino alla fine della sua dimostrazione, a considerare come derivate parziali di una medesima funzione q le due espressioni suddette. Dunque è avvenuto proprio il contrario di quanto ha supposto il Van der Waals e sostiene ora il Guglielmo.

Ma il Guglielmo, per giungere alla sua conclusione, ricorre ad un'altra considerazione; egli vuole che il Poisson abbia introdotto nel suo ragionamento i due calori specifici, quello a volume costante c_v e quello a pressione costante c_p , in modo da ottenere l'equazione

$$(1) \quad dq = c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp + c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv$$

che è (secondo il Guglielmo) una equazione esprimente il primo principio di termodinamica.

Qui sta l'equivoco principale nella critica del prof. Guglielmo, equivoco che lo ha indotto naturalmente ad altre conclusioni inesatte.

Per spiegarmi, devo ricordare che egli, al principio della sua Nota, dopo aver scritto la prima legge sotto la forma

$$dq = du + pdv,$$

soggiunge che, per mezzo di trasformazioni diverse e con l'aiuto del 2° principio, questa equazione si può scrivere nei tre modi seguenti:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} dq = c_v dT + T \frac{\partial p}{\partial T} dv \\ dq = c_p dT - T \frac{\partial v}{\partial T} dp \\ dq = c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv + c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp. \end{array} \right.$$

L'ultima di queste coincide con la (1) sopra ricordata.

Non so come il prof. Guglielmo non si sia accorto che, mentre le prime due equazioni sono veramente espressioni del 1° principio (e anche del 2°), la terza non ha nulla a che fare nè col 1° nè col 2°; ma si deduce dalle solite relazioni fra i coefficienti nelle espressioni di dq , con un artificio semplice di calcolo, che non vi introduce alcun nuovo concetto fisico. Basta scrivere le solite relazioni

$$dq = c_v dT + l dv, \quad dq = c_p dT + h dp;$$

sviluppando dT , si ha

$$dq = c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp + \left(c_v \frac{\partial T}{\partial v} + l \right) dv$$

$$dq = c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv + \left(c_p \frac{\partial T}{\partial p} + h \right) dp;$$

dovendo essere eguali i coefficienti di dv nelle due equazioni, la 1^a si può scrivere

$$dq = c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp + c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv$$

identica alla (1) ed alla 3^a delle (2); e la dimostrazione è sostanzialmente la stessa che il Guglielmo riproduce, attribuendola a Bertrand e Poincaré.

Questa dimostrazione diretta pare che dovrebbe bastare a persuadere che la formola così ottenuta non si potrà mai considerare come una espressione del primo principio. Ma per convincersi di ciò basta osservare la forma della equazione. In essa tanto dq quanto i calori specifici possono esprimersi con unità termiche qualsiasi, perchè non vi appare, nè esplicito nè sottinteso, l'equivalente meccanico del calore; l'equazione non esprime altro se non che una quantità di calore è eguale alla somma di due altre quantità di calore.

Perchè una equazione rappresenti il primo principio, bisogna che essa esprima l'equivalenza fra una quantità di calore e una quantità di lavoro per mezzo dell'equivalente meccanico, che può anche essere 1, con opportuna scelta delle unità di misura; ma l'equivalente ci deve essere, o esplicito o implicito, come si vede nelle prime due delle equazioni (2), dove, per rendere omogenei i termini, va sottinteso che i termini dq , $c_v dT$, $c_p dT$ sono moltiplicati per l'equivalente meccanico, il cui valore numerico, nel caso speciale, è supposto 1.

Invece nella 3^a delle (2) l'omogeneità esiste indipendentemente dall'essere l'equivalente meccanico costante o variabile.

Cadono perciò e la conclusione del prof. Guglielmo relativa alla dimostrazione del Poisson, al quale egli vorrebbe attribuire la scoperta inconsapevole del primo principio, e la obiezione alla mia dimostrazione, cioè alla dimostrazione da me ricordata della formola di Poisson, senza ricorrere alla legge dell'equivalenza. Infatti anche la relazione

$$dq = \frac{1}{R} (c_p p dv + c_v v dp),$$

che deriva dalla (1) nel caso dei gas, soltanto introducendovi la condizione $pv = RT$, è evidente che non può perciò diventare la espressione di una legge che nella (1) non è contenuta.

Il prof. Guglielmo fa poi diverse altre critiche al mio scritto. Mi insegna che dq non indica la variazione del calore del gas, perchè il calore comunicato in parte produce lavoro esterno. Ma se io mi accingevo a dimostrare che si giunge alla formola di Poisson senza presupporre alcuna nozione relativa al primo principio, come voleva che io cominciassi col tener conto di calore trasformato in lavoro esterno? Allora si sarebbe avuto ragione di

dire che il mio ragionamento era un circolo vizioso, una petizione di principio. Io dovevo mettermi nei panni, non di Poisson, che sarebbe troppa immodestia da parte mia, ma di un contemporaneo di Poisson e considerare la variazione di calore come la si considerava allora. Forse ho fatto male a non avvertirne subito il lettore, per non lasciargli credere che io nelle mie nozioni sulla termodinamica fossi rimasto all'epoca del Poisson, quando la termodinamica non esisteva.

Non giungo poi a comprendere ciò che il prof. Guglielmo scrive a pag. 122, dove vorrebbe dimostrare che io o dimostro ciò che voglio negare, o deduco una legge vera da una premessa falsa. Non vedo come quella equazione (8)

$$dq = c_v dt + l dv$$

possa dar luogo alla interpretazione che egli ne dà.

Qui potrei ricorrere all'autorità di tutti i trattati di termodinamica per appoggiare quanto affermo, che cioè quella equazione non si è mai scritta con l'intenzione di esprimere il principio dell'equivalenza. Che poi, applicando questo principio, si venga a scoprire che la quantità l si può esprimere in funzione di altri coefficienti fisici, è questo precisamente un vantaggio che ci procura la conoscenza di quella legge. Nel caso particolare dei gas si trova $Jl = p$; J è l'equivalente meccanico. Per un corpo qualunque si trovano altre relazioni utili che permettono di determinare l . Se si ricorre al 2° principio, si ottiene $Jl = T \frac{\partial p}{\partial T}$.

Seguendo il modo di ragionare del prof. Guglielmo, si dovrebbe dire: nella equazione (8), o si ammette $Jl = T \frac{\partial p}{\partial T}$, e la (8) diventa identica alla equazione che esprime il 2° principio; o l è diverso, e allora la (8) è falsa. Si giungerebbe quindi alla conseguenza assurda che la (8) esprime non solo il 1° ma anche il 2° principio.

Il prof. Guglielmo sembra voler riassumere il suo concetto laddove dice che basta che una relazione contenga il rapporto dei calori specifici, *in funzione dei soliti dati*, per diventare una forma o una conseguenza del 1° principio; e così dice che ciò accade anche per la relazione $pv = RT$ quando si tenga conto che $R = c_p - c_v$. Egli non si accorge, almeno così mi sembra, che il 1° principio è compreso unicamente in quest'ultima formola, la quale contiene, come fattore sottinteso, l'equivalente meccanico; e nessuno gli può negare che, se si prende una equazione e vi si introduce una condizione voluta da un determinato principio, essa finirà col contenere ciò che vi si è introdotto; ma così non si dimostra che quel principio vi era contenuto anche prima. Il concetto dell'autore poi non è neppure chiaro, perchè, laddove egli dice che quell'equazione diventa una *forma* del 1° principio (cosa diversa

dall'essere una *conseguenza*), bisogna riflettere che veramente si dovrebbe chiamare così una equazione che rappresenta il detto principio nel suo significato generale, altrimenti non è più quel principio, e non mi pare che lo si possa dire espresso da una formola dove entrano soltanto elementi relativi a un corpo, o ad una classe limitata di corpi.

In ogni modo tutte queste considerazioni del prof. Guglielmo non provano nulla di ciò che egli si era proposto di spiegare relativamente alla dimostrazione della formola di Poisson.

In conclusione, se il prof. Guglielmo ha voluto dire che la formola di Poisson, per esser vera, non deve essere in disaccordo col 1° principio di termodinamica, tutti gli daranno ragione. Potrei anzi soggiungere che una affermazione simile sarebbe affatto superflua, perchè si sa che tutte le formole esprimenti leggi fisiche, in qualunque ordine di fenomeni, devono andar di accordo col principio della conservazione dell'energia, almeno finchè non venga dimostrato che anche questo principio sia soltanto una legge-limite o, comunque, inesatto; spesse volte si ricorre al principio della conservazione allo scopo di controllare, per così dire, una legge fisica che si sia trovata o per via d'ipotesi o per via sperimentale.

Quando invece il prof. Guglielmo vuol sostenere che la formola di Poisson non si può dimostrare senza premettere il principio d'equivalenza, e che questo principio è rappresentato dalla equazione (1) (ciò che è una cosa ben diversa dal dire che la formola di Poisson deve andare d'accordo con quel principio), allora confesso che non posso essere del suo parere.

Storia della geometria. — *Note sulla storia della matematica in Italia* del Corrispondente GINO LORIA.

I. — Pier della Francesca e Luca Pacioli.

Fra le opere a stampa di Luca Pacioli, (1445-1514 circa), una va n'ha su cui gli storici della matematica non si sono fino ad ora molto approfonditi e contro la cui legittimità furono da tempo sollevati molti giustificati dubbi: è quella dal titolo *Divina Proportione*.

Si tratta di una raccolta di problemi aventi per iscopo la ricerca del contenuto di poligoni piani e di poliedri, di aree contornate da linee rette e circolari e di volumi limitati da superficie piane e sferiche. Essa sembra modellata, piuttosto sopra gli scritti geometrici di Erone Alessandrino, che non sopra le opere apparse durante il periodo aureo della geometria greca; ivi però ha trovato posto la figura nascente dalla scambievole intersezione di due cilindri rotondi ad assi fra loro perpendicolari, la quale, certamente, è la