ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

dall'essere una *conseguenza*), bisogna riflettere che veramente si dovrebbe chiamare così una equazione che rappresenta il detto principio nel suo significato generale, altrimenti non è più quel principio, e non mi pare che lo si possa dire espresso da una formola dove entrano soltanto elementi relativi a un corpo, o ad una classe limitata di corpi.

In ogni modo tutte queste considerazioni del prof. Guglielmo non provano nulla di ciò che egli si era proposto di spiegare relativamente alla dimostrazione della formola di Poisson.

In conclusione, se il prof. Guglielmo ha voluto dire che la formola di Poisson, per esser vera, non deve essere in disaccordo col 1° principio di termodinamica, tutti gli daranno ragione. Potrei anzi soggiungere che una affermazione simile sarebbe affatto superflua, perchè si sa che tutte le formole esprimenti leggi fisiche, in qualunque ordine di fenomeni, devono andar di accordo col principio della conservazione dell'energia, almeno finchè non venga dimostrato che anche questo principio sia soltanto una legge-limite o, comunque, inesatto; spesse volte si ricorre al principio della conservazione allo scopo di controllare, per così dire, una legge fisica che si sia trovata o per via d'ipotesi o per via sperimentale.

Quando invece il prof. Guglielmo vuol sostenere che la formola di Poisson non si può dimostrare senza premettere il principio d'equivalenza, e che questo principio è rappresentato dalla equazione (1) (ciò che è una cosa ben diversa dal dire che la formola di Poisson deve andare d'accordo con quel principio), allora confesso che non posso essere del suo parere.

Storia della geometria. — *Note sulla storia della matematica in Italia* del Corrispondente GINO LORIA.

I. — Pier della Francesca e Luca Pacioli.

Fra le opere a stampa di Luca Pacioli, (1445-1514 circa), una va n'ha su cui gli storici della matematica non si sono fino ad ora molto approfonditi e contro la cui legittimità furono da tempo sollevati molti giustificati dubbî: è quella dal titolo *Divina Proportione*.

Si tratta di una raccolta di problemi aventi per iscopo la ricerca del contenuto di poligoni piani e di poliedri, di aree contornate da linee rette e circolari e di volumi limitati da superficie piane e sferiche. Essa sembra modellata, piuttosto sopra gli scritti geometrici di Erone Alessandrino, che non sopra le opere apparse durante il periodo aureo della geometria greca; ivi però ha trovato posto la figura nascente dalla scambievole intersezione di due cilindri rotondi ad assi fra loro perpendicolari, la quale, certamente, è la più complicata e notevole di quelle che s'incontrano nello scritto di Archimede, di recente scoperto in una biblioteca di Costantinopoli.

Che per comporre la *Divina Proportione* Luca Pacioli abbia attinto a larga mano nei lavori del celebre pittore Pier della Francesca, era stato affermato da G. Vasari ed E. Danti; nè valsero, a togliere la macchia che in conseguenza deturpava la sua memoria, le contrarie affermazioni indimostrate di due biografi più recenti del celebre frate, P. Cossali (1) e H. Staigmüller (2).

L'accusa di plagio venne più di recente e con maggiore franchezza ripetuta da G. Pittarelli (3), il quale ha segnalato ed analizzato un Codice vaticano-urbinate, dal titolo *De corporibus regularibus*, il quale presenta somiglianze così profonde con la *Divina Proportione* che questa può ben dirsi una versione di quello dal latino in italiano (se italiano può dirsi il gergo usato dal Pacioli e che è una miscela di tutti i dialetti parlati ai suoi tempi in Italia).

Ora un benemerito erudito, Gerolamo Mancini, ben noto come esimio cultore della storia delle arti mute, in una Memoria stampata, sotto gli auspicii di questa illustre Accademia (4), ha testè dato in luce e commentato quel lavoro inedito di Pier della Francesca e così ha offerto a tutti i mezzi per riconoscere che il plagio a danno di questo sommo artista fu effettivamente commesso. Come conseguenza di ciò, a lui, che già aveva ottenuto un posto non ispregievole nella storia della prospettiva (5), ne deve essere concesso uno non meno onorevole nella storia delle matematiche durante l'oscuro periodo in cui i germi della matematica greca, da secoli sopolti, si ridestarono a nuova vita per dare mirabili frutti.

Non sarò per fermo io che tenterò di far cassare o mitigare il severo giudizio pronunciato dal Mancini contro il famoso matematico di Borgo S. Sepolcro, giudizio il quale ha tutto l'aspetto di una sentenza in ultima istanza. Soltanto reputo doveroso notare come il misfatto da lui commesso appaia in certa misura attenuato quando si tenga conto dei sentimenti e delle abitudini diffusi fra coloro che vissero nei secoli XVI e XVII.

Infatti, il rispetto per la proprietà delle opere dell'ingegno sembra essere stato allora del tutto ignoto, onde ritenevasi lecito di impadronirsi dei

(1) *Elogio di fra Luca Pacioli* (in *Scritti inediti del P. D. Cossali, pubblicati da B. Boncompagni*, Roma 1857).

(2) *Lucas Paciuolo, eine biographische Skizze* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. XXXIV, 1889).

(3) *Intorno al libro « de Perspectiva pingendi » di Pier dei Franceschi* (Atti del Congresso intern. di scienze storiche, tom. XII, Roma 1904) e *Luca Pacioli usurpò per sè qualche libro di Pietro de' Franceschi?* (Atti del IV Congresso dei matematici, tom. III, Roma 1909).

(4) *L'opera « De corporibus regularibus » di Pietro Franceschi, detto Della Francesca, usurpata da fra Luca Pacioli* (Classe di scienze morali, ser. III, vol. XIV).

(5) C. Winterberg, *Petrus Pictor Burgensis, de perspectiva pingendi* (Strassburg, 1899).

lavori inediti dei predecessori defunti, senza mai sentirsi assaliti dal dubbio o tormentati dal rimorso di commettere azione meno che onesta.

Così nel 1543 Nicolò Tartaglia pubblicava come propria fatica la traduzione latina dell'opuscolo archimedeo *De insidientibus aquae* eseguita nel 1269 da Gugliemo di Moerbeke; ed i posteri si mostrarono generalmente propensi ad assolverlo dalla colpa nella quale egli era così incorso, considerando che grande era la benemerenza da lui acquistata col porre in circolazione idee e metodi importanti e pure dimenticati.

Così, circa nella stessa epoca, G. B. Villapand, gesuita spagnuolo, e Bernardino Baldi, abate di Guastalla, non sdegnavano abbassarsi sino al livello di un uomo senza scrupoli qual era Gerolamo Cardano, emulandolo nel saccheggiare i manoscritti di Leonardo da Vinci ([1]), quasi fiduciosi nel perdono che avrebbero loro concesso gli studiosi, nella letizia di essere venuti a conoscere verità fondamentali sepolte in documenti generalmente inaccessibili.

E siffatto mal vezzo continuò anche durante il secolo seguente; giacchè — lo afferma un giudice non sospetto ([2]) — « Roberval citava soltanto gli autori ai quali nulla doveva ([3]); e se Descartes nel suo carteggio fece menzione di qualche geometra, era spessissimo per intavolare con lui una discussione che ben presto assumeva il tono di un litigio o per pronunciare contro di lui un giudizio secco ed altezzoso » ([4]).

A tali deplorevoli fatti, altri congeneri potranno aggiungersi, eventualmente ricorrendo alla storia di altre discipline (naturalmente dopo di essersi accertati con ogni cautela che non si tratta di coincidenze fortuite o di involontarie dimenticanze). Di essi deve tenere il massimo conto tanto chi si compiace di seguire attraverso i secoli le fasi della morale, quanto chi vuole pronunciare un sereno giudizio intorno alla gravità delle colpe degli scienziati che vengono citati dinanzi al tribunale della storia, sotto l'imputazione di appropriazione indebita.

II. — T. Ceva e G. Grandi nella preistoria della Geometria descrittiva.

M. Chasles affermò, nel suo celebre *Aperçu historique*, che l'applicazione dell'algebra alla teoria delle curve è una dottrina « dont aucune germe

([1]) Cfr. P. Duhem, *Études sur Léonard de Vinci*, I sér. (Paris 1906), pp. 83 e 101.

([2]) P. Duhem, loc. cit., pag. 142.

([3]) Ad es., nel suo *Traité des indivisibles*, si cerca indarno il nome di B. Cavalieri, di cui egli certamente conosceva la *Geometria indivisibilibus*.

([4]) A tale sistema il grande filosofo si attenne anche nelle sue opere a stampa. Così, quando nel 1637, nel III libro della sua *Géometrie*, parlò della moltiplicità delle radici delle equazioni algebriche, non fece che ripetere o svolgere un concetto esposto chiaramente otto anni prima da A. Girard in un'opera pubblicata ad Amsterdam e che non può essere sfuggito a lui che allora viveva in Olanda.

ne s'est trouvé dans les écrits des géomètres anciens, et le seule peut-être dont on puisse dire, comme Montesquieu de son *Esprit des lois*, PROLEM SINE MATRE CREATAM » [1]. Ora, quantunque la storia della geometria analitica presenti tuttora molte e profonde lacune che sarebbe importante ed urgente colmare [2], pure si è in grado, sino da oggi, di affermare che quelle parole del grande storico della geometria dovrebbero venire senz'altro cancellate in una nuova edizione riveduta e corretta dell'*Aperçu historique*; chè la geometria alle coordinate, quale si trova nelle opere di Descartes (o, meglio ancora, negli scritti coevi di Fermat), non è un trovatello d'ignota provenienza, ma un individuo appartenente ad una gloriosa famiglia, non ancòra spenta, le cui origini risalgono almeno ad Apollonio Pergeo. È questo uno dei più cospicui risultati che diedero i rigorosi procedimenti, caratteristici del metodo storico, quando vennero applicati ad investigare l'evoluzione del pensiero matematico.

Ora lo stesso metodo ha permesso, non soltanto di sfatare la leggenda che la Geometria descrittiva sia opera totalmente originale di Monge; non soltanto di farne risalire le scaturigini all'antichità più remota [3], ma anche di seguirla nelle principali (se non ancora in tutte) sue fasi di sviluppo.

Tali fasi vennero *generalmente* determinate (o tuttalmeno influenzate) dai bisogni delle arti del disegno o dalla scienza delle costruzioni, *generalmente ma non sempre*, chè, specialmente in Italia, alcuni procedimenti, che oggi si riguardano per caratteristici del metodo della doppia proiezione ortogonale, furono ideati svolti ed applicati in quanto potevano riuscire in qualche modo giovevoli al progresso della pura geometria.

Ed infatti, un secolo prima che Monge iniziasse la sua memorabile opera di riforma, il modenese Camillo Guarino Guarini (1624-1683), in un monumentale trattato [4] — la cui natura prevalentemente teorica risulta dall'essere presentato quasi come una metamorfosi degli *Elementi* di Euclide — introdusse due sostanziosi capitoli (o *trattati*, per servirsi della nomenclatura da lui adottata), dedicati uno (il XXVI) alle proiezioni ortogonali e stereografiche, l'altro (il XXXII: *De superficies corporibus in plani redigendi*) allo sviluppo di certe superficie su di un piano [5].

(1) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, II éd. conforme à la I (Paris 1875), pag. 94.

(2) Cfr. la mia comunicazione *Pour une histoire de la géométrie analytique* (Verhandl. des dritten internationalen Mathemathiker-Kongresses in Heidelberg, Leipzig 1905, pp. 562-74), riassunta da H. Bosmans, con intendimento di approvazione, nel fascicolo di dicembre 1915 della nota rivista belga *Mathésis*.

(3) Cfr. la comunicazione da me fatta a questa illustre Accademia il 15 giugno 1915: *Presentando due volumi di « Vorlesungen über darstellenden Geometrie »*.

(4) *Euclides adauctus et methodicus matematicaque universalis* (Aug. Taurin, 1671).

(5) Quantunque sia estraneo allo scopo nostro l'addentrarci in un'analisi di questo trattato, pure non possiamo esimerci dal notare che sembra essere sfuggita al Guarini

Ora appunto da siffatte considerazioni venne probabilmente ispirato l'egregio geometra Tommaso Ceva (1648-1737) nell'applicare lo sviluppo delle superficie coniche e cilindriche (supposte sempre *circolari rette*) alla definizione, alla costruzione ed allo studio di nuove curve sghembe, tutte situate sopra coni rotondi ed ulteriormente determinate o dalle loro proiezioni ortogonali sul piano della base (*iconografie*), oppure dalle linee in cui si trasformano per effetto dello sviluppo della superficie alla quale appartengono.

La prima di tali curve ha per proiezione una spirale d'Archimede col polo nel centro della base; è dunque quella che oggi viene spesso, benchè poco propriamente, chiamata *elica conica* (¹). Il Ceva non fu il primo a considerarla, chè nella prop. 29 del IV libro della *Collezione matematica* di Pappo Alessandrino (²) se ne incontra una definizione (come intersezione di superficie) che soltanto nella forma differisce da quella prescelta dal geometra italiano. Inoltre, di essa fece uso (sia pure senza esprimersi con la desiderabile precisione) il commentatore Proclo nelle sue chiose alla IV definizione del I libro degli *Elementi* di Euclide, il che fa ritenere che la linea in questione avesse raggiunto presso i Greci una considerevole celebrità. La stessa curva si trova investigata, dal punto di vista della geometria di misura, nella

la proprietà che caratterizza le superficie sviluppabili: quella, cioè, di non dar luogo a rotture od a sovrapposizioni quando esse vengano svolte su di un piano; in conseguenza, dopo le superficie coniche e cilindriche, egli ritenne lecito sviluppare le sfere, le conoidi e le sferoidi (intesi questi vocaboli nel senso archimedeo).

(¹) Dico « poco propriamente » perchè essa non gode della proprietà caratteristica delle eliche (costanza del rapporto della curvatura alla torsione).

Se il cono considerato ha la base nel piano xy, per altezza l e apertura $2a$, esso potrà rappresentarsi con la equazione

$$(x^2 + y^2)\cot^2\alpha - (z - l)^2 = 0\,, \tag{1}$$

ossia mediante le tre seguenti:

$$x = \varrho\cos\omega \quad , \quad y = \varrho \operatorname{sen}\omega \quad , \quad z = l - \varrho\cot\alpha\,; \tag{2}$$

se, quindi, si considesa su di esso la curva la cui proiezione sul piano xy ha per equazione

$$\varrho = a\cos\omega,$$

la curva obbiettiva (elica conica) avrà la seguente rappresentazione parametrica:

$$x = a\omega\cos\omega \quad , \quad y = a\omega\operatorname{sen}\omega \quad , \quad z = l - a\cot\alpha\,\omega\,. \tag{3}$$

Dopo lo sviluppo essa si presenta come una nuova spirale d'Archimede; ciò è conseguenza del fatto che fra le coordinate polari $\varrho\,,\omega$ di un punto dell'iconografia e quelle $\varrho'\,,\omega'$ del punto corrispondente dello sviluppo passano le relazioni

$$\omega' = \omega\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \varrho' = \frac{\varrho}{\operatorname{sen}\alpha}\,. \tag{4}$$

(²) Pappo, ed. Hultsch (Berlin 1876, pag. 262).

memoria di B. Pascal intitolata *Dimension d'un solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cone*, pubblicata nel 1658 in una *Lettre de A. Dettonville* (¹) *à Monsieur de Sluze* (²).

Siccome l'autore delle *Pensées* non fa cenno dei suoi predecessori e siccome, d'altronde egli non disponeva di vasta cultura nella letteratura matematica dei Greci, così è presumibile che egli sia giunto da solo a concepire quella curva. Se altrettanto possa dirsi di Tommaso Ceva, ci sembra per lo meno assai dubbio, giacchè nella lettera che egli scrisse il 17 luglio 1701 a Guido Grandi (1671-1742) per informarlo degli studi di cui attualmente c'interessiamo (³), si trova citata una proposizione di Pappo (la 21 del IV libro della *Collezione*) che di poco precede quella che insegna la definizione della spirale conica.

Di tale curva il Ceva enunciò una proprietà concernente il rapporto che passa fra l'area descritta durante un certo intervallo dal raggio vettore della spirale d'Archimede iconografia della spirale conica e l'area corrispondente del cono. Egli fa poi cenno della possibilità di individuare una curva del dato cono mediante la curva in cui essa si muta per effetto dell'operazione di sviluppo del cono stesso; come esempio segnala il caso in cui l'intero cono diviene, dopo lo sviluppo, un quadrante circolare e la curva la semicirconferenza descritta su uno dei raggi estremi; il che porge a lui l'occasione di enunciare il problema che consiste nella ricerca di ciò che diviene una curva del cono quando si svolga su di un piano, non quel cono, ma il cilindro che la proietta sulla base.

La novità ed importanza di siffatte considerazioni spinsero il Grandi (per sua natura sempre pronto e disposto a munire di solide dimostrazioni le verità da altri scoperte) a colmare le lacune lasciate dal suo illustre corrispondente. A tale scopo (⁴) egli si è proposto il seguente

Problema generale. *Costruire per punti la curva in cui si trasforma una linea tracciata sopra un cono circolare retto, quando questo venga svolto su di un piano, nell'ipotesi che di quella curva si conosca l'iconografia.*

(¹) Pseudonimo di Pascal.

(²) Questa lettera conseguì allora scarsa diffusione fuori della Francia; si può anzi ritenere che il mondo matematico ne abbia avuto notizia soltanto nel 1779, quando, per cura di C. Bossut, venne inserita nel tom. V delle *Oeuvres de B. Pascal* pubblicate a La Haye.

(³) Questa lettera fu per la prima volta pubblicata, insieme con la relativa risposta, in appendice alla *Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam, seu logarithmicam lineam* del Grandi (Florentiae, MDCCI); venne poi riprodotta nel tom. I di Ch. Hugenii *Opera reliqua* (Amstelodami, MDCCXXVIII) e così ottenne estesissima notorietà.

(⁴) Cfr. le pubblicazioni citate nella nota precedente.

E lo ha risoluto con un procedimento assai semplice, di cui è agevole ravvisare l'identità sostanziale con quello oggi in uso (¹). Nè al Grandi è sfuggito che la costruzione esposta, eseguita in ordine inverso, abilita a costruire per punti l'iconografia di una curva appartenente al dato cono quando se ne conosca lo sviluppo; onde a lui si debbono le prime soluzioni dei due problemi fondamentali che presenta lo sviluppo di un piano di un cono circolare retto.

Il Grandi, che maneggiava con non comune maestria i procedimenti di geometria infinitesimale sintetica in uso nel periodo che immediatamente precede l'invenzione del calcolo differenziale, ha ricamato altri eleganti sviluppi sopra il canevaccio fornito dal Ceva; su di essi non è il caso di insistere nella presente occasione. Tuttavia crediamo opportuno rilevare che nella chiusa del suo scritto il Grandi tenne parola della curva che sta sopra un cono circolare retto ed ha per iconografia una *spirale logaritmica* [linea questa che egli, al pari di E. Torricelli (²), chiama *spirale geometrica* (³)]; ora tale linea ha assunto ai tempi nostri una notevole importanza e s'incontra in molti lavori moderni sotto il nome, scelto da P. Serret, di *elica cilindro-conica* (⁴); onde l'averla per primo considerata accresce di una le molte benemerenze che di fronte alla geometria possiede Guido Grandi (⁵).

(¹) Si paragoni, infatti, la figura che si trova a pag. 190 del succitato volume del Grandi, con la fig. 54 del mio manuale *Poliedri curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva* (Milano, 1912).

(²) Cfr. la comunicazione da me fatta a questa Accademia il 5 dicembre 1897 sopra *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva*.

(³) Di tale curva il Grandi parla nella succitata *Geometrica demonstratio* ecc. (pp. 10-11 e 53) come linea analoga, in coordinate polari, alla logistica, di cui Huygens aveva rivelato l'importanza; egli ricorda come proprio unico predecessore Descartes, il quale ne fece menzione in una lettera diretta al Mersenne il 12 settembre 1638 (e pubblicata per le stampe nel 1667); che altrettanto abbia fatto il Torricelli in parecchie lettere, la più antica delle quali sembra essere quella diretta a Michelangelo Ricci il 17 marzo 1646, sembra sia sfuggito al Grandi.

(⁴) Mantenendo il sistema di rappresentazione analitica adottato in una nota precedente, come equazioni di tale curva si possono assumere le seguenti:

$$x = a e^{\lambda\omega} \cos\omega \quad , \quad y = a e^{\lambda\omega} \operatorname{sen}\omega \quad , \quad z = l - a \cot\alpha\, e^{\lambda\omega} ;$$

essa, a sviluppo compiuto del cono, si presenta sotto l'aspetto di una nuova spirale logaritmica.

(⁵) Tali benemerenze vennero un po' esagerate da Frieda Nugel nella sua *Inaugural-Dissertation* dal titolo *Die Schraubenlinien: eine monographische Darstellung* (Halle a. S., 1912), chè il Grandi si è limitato a definire l'elica cilindro-conica; in particolare non fece nemmeno un cenno della sua proprietà di tagliare sotto angolo costante le generatrici tanto del cono quanto del cilindro a cui appartiene. Altrettanto infondata è la critica che l'autrice rivolge a M. Chasles di avere scambiato l'elica cilindro-conica con la elica conica, chè gli è proprio di questa che il Grandi, seguendo le orme di Tommaso Ceva, si è di proposito occupato, dell'altra non avendo che esposta la definizione.