ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

zioni « sostenute »; tuttavia le contrazioni dei detti gruppi sono sempre meno alte, sia di quelle che il muscolo eseguiva prima di subire l'azione dell'acido carbonico, sia anche di quelle che eseguì durante la successiva restaurazione in ossigeno.

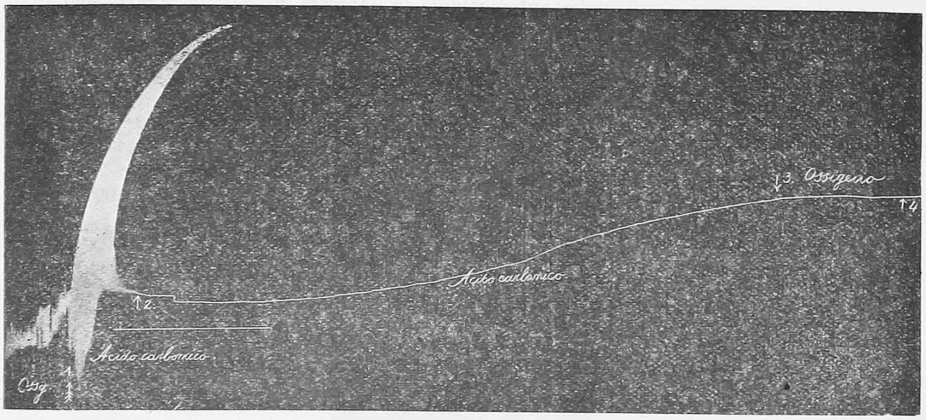

Fig. 6.

Ma sul fenomeno descritto da Broca e Richet, da Waller e da von Lhota, tornerò nelle Note successive.

Matematica. — *Sopra un'applicazione della convergenza in media*. Nota II di Pia Nalli, presentata dal Corrisp. G. Bagnera.

1. Dimostrerò la seguente proposizione:

Sia

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

una serie di Dirichlet, appartenente alla classe considerata nella Nota I *e convergente nel semipiano* $\sigma > \beta$. *Posto*

$$f(s) = \alpha(\sigma, t),$$

condizione necessaria e sufficiente perchè $\alpha(\sigma, t)$, *al tendere di* σ *a* β *per valori maggiori di* β, *converga in media, in* $(-\infty, +\infty)$, *verso una funzione* $p(t)$, *è che la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \beta}$$

sia convergente.

Posto

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n\,,$$

se la (1) converge nel semipiano $\sigma > \beta$, in tale semipiano convergeranno pure le due serie

$$f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, e^{-\lambda_n s}\,,$$

$$f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\, e^{-\lambda_n s}\,.$$

Per $\sigma > \beta$ si avrà, per la (4) della Nota I,

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_1(\sigma + it)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\, e^{-2\lambda_n \sigma}$$

e

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f_2(\sigma + it)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2\, e^{-2\lambda_n \sigma}\,,$$

e perciò

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(s)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\, e^{-2\lambda_n \sigma}\,,$$

cioè

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |\alpha(\sigma t)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\, e^{-2\lambda_n \sigma}\,.$$

Se l'insieme delle funzioni $\alpha(\sigma, t)$, al tendere di σ a β per valori maggiori di β, converge in media, in $(-\infty, +\infty)$, ad una funzione $p(t)$, si avrà

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2\, dt = \lim_{\sigma=\beta+0} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\, e^{-2\lambda_n \sigma}\,. \tag{2}$$

Infatti, rappresentando con $\bar{a}$ il coniugato di un numero complesso a, abbiamo

$$|p(t)|^2 = |\alpha(\sigma, t)|^2 + p(t)\,[\overline{p(t)} - \overline{\alpha(\sigma, t)}] +$$
$$+ \overline{p(t)}\,[p(t) - \alpha(\sigma, t)] - |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2\,,$$

e perciò, applicando l'ineguaglianza di Schwarz,

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2 \, dt - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \right| \leq \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |\alpha(\sigma, t)|^2 \, dt - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \right| + \\
(3) \qquad + 2 \left\{ \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2 \, dt \cdot \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2 \, dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \\
+ \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2 \, dt .
\end{aligned}
$$

Fissato $\varepsilon > 0$, determinato δ in modo che, per tutti i valori di σ soddisfacenti alla condizione $\beta < \sigma < \beta + \delta$, sia

$$
\limsup_{\omega = \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2 \, dt < \varepsilon^2 ,
$$

e posto

$$
\mathrm{L} = \limsup_{\omega = \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2 \, dt ,
$$

si trae, dalla (3),

$$
(4) \qquad \limsup_{\omega = \infty} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2 \, dt - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \right| \leq 2 \mathrm{L}^{\frac{1}{2}} \varepsilon + \varepsilon^2 .
$$

Se si fa tendere ω ad ∞ in modo che $\frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2 \, dt$ tenda ad L′, si avrà

$$
\left| \mathrm{L}' - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} \right| < 2 \mathrm{L} \varepsilon + \varepsilon^2 ;
$$

il che dimostra che si ha

$$
\lim_{\sigma = \beta + 0} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \sigma} = \mathrm{L}' ,
$$

cioè

$$
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \beta} = \mathrm{L}' ,
$$

e perciò, finalmente,

$$
\lim_{\omega = \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2 \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \beta} .
$$

La condizione enunciata è dunque necessaria.

Essa è sufficiente. Infatti, quando è soddisfatta, si può costruire una funzione $p(t)$ per la quale si abbia

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t)\, e^{\lambda_n it}\, dt = a_n e^{-\lambda_n \beta} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2\lambda_n \beta} \text{ (1)}.$$

Si avrà allora

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (e^{-\lambda_n \beta} - e^{-\lambda_n \sigma})^2.$$

La serie che comparisce nel secondo membro di questa relazione converge uniformemente rispetto a σ, perchè il suo termine generale non supera $|a_n|^2 e^{-2\lambda_n \beta}$; essa rappresenta una funzione continua di σ che si annulla per $\sigma = \beta$. Dunque

$$\lim_{\sigma=\beta+0} \left\{ \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2\, dt \right\} = 0:$$

cioè l'insieme delle funzioni $\alpha(\sigma, t)$, al tendere di σ a $\beta + o$, converge in media verso la funzione $p(t)$.

2. Il teorema del prof. Pincherle, richiamato nella Nota I, è facilmente estendibile, come l'A. osserva, al caso di una funzione analitica, regolare entro un'area semplicemente connessa, limitata da una linea analitica, quando si sa che la parte reale e la parte immaginaria di $\varphi(x)$ tendono in media a funzioni di punti del contorno, sommabili insieme coi loro quadrati, allorchè la variabile tende al contorno in dipendenza alla variazione di un opportuno parametro.

Un'estensione analoga si può fare per il teorema da me dimostrato sulle serie di Dirichlet; ciò è in relazione col fatto che alla (5) della Nota I si può dare una forma più generale.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ sia una serie di Dirichlet della classe considerata nella Nota I, convergente nel semipiano $\sigma > \beta$; s_0 sia un punto di tale semipiano; $\sigma(\tau)$ ed $\omega(\tau)$ siano due funzioni continue di una variabile reale τ, definite per tutti i valori di τ tra $-\infty$ e $+\infty$, dotate di derivate continue,

(1) Pia Nalli, *Sopra una nuova specie di convergenza in media* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII, 2° semestre 1914, pp. 305-319); *Aggiunta alla Memoria*: « *Sopra una nuova specie di convergenza in media* » (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII, 2° semestre 1914, pp. 320-323).

non entrambe nulle, salvo eventualmente in una infinità numerabile di punti non aventi punti-limiti a distanza finita. Si abbia ancora

$$\sigma(-\tau) = \sigma(\tau)\,;$$

$\omega(\tau) \gtreqless 0$ secondochè è $\tau \gtreqless$, e

$$\lim_{|\tau|=\infty} |\omega(\tau)| = \infty\,.$$

Finalmente, denotando con η un conveniente numero positivo, si abbia

$$\sigma_0 - \eta > \sigma(\tau) > \beta + \eta\,, \tag{5}$$

qualunque sia il valore di τ.

Definita $G(s)$ come nella Nota I, *si avrà*

$$f(s_0) = \lim_{x=\infty} \frac{1}{[\omega(x) - \omega(-x)]\,i} \int_{\sigma(-x)+i\omega(-x)}^{\sigma(x)+i\omega(x)} f(s)\, G(s - s_0)\, ds\,, \tag{6}$$

dove l'integrazione è estesa all'arco della curva formata dai punti $\sigma(\tau) + i\,\omega(\tau)$ *che va dal punto* $\sigma(-x) + i\,\omega(-x)$ *al punto* $\sigma(x) + i\,\omega(x)$.

Infatti, essendo il prodotto $f(s)\,G(s - s_0)$ funzione regolare della variabile complessa s nella striscia limitata dalle rette $\sigma = \beta + \eta$, $\sigma = \sigma_0 - \eta$, si avrà

$$\frac{1}{i} \int_{\sigma(-x)+i\omega(-x)}^{\sigma(x)+i\omega(x)} f(s)\, G(s - s_0)\, ds = \int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} f(\sigma(x) + it)\, G(\sigma(x) - s_0 + it)\, dt\,.$$

Ma, data l'assoluta convergenza delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n(\sigma(x) + it)}\quad,\quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(\sigma(x) - s_0 + it)}$$

che rappresentano rispettivamente $f(\sigma(x) + it)$ e $G(\sigma(x) - s_0 + it)$, si può scrivere

$$f(\sigma(x) + it)\, G(\sigma(x) - s_0 + it) = \sum_{1}^{\infty}{}_{m,n}\, a_n\, e^{-\lambda_n(\sigma(x)+it)}\, e^{\lambda_m(\sigma(x)-s_0+it)}\,.$$

Il modulo del termine generale della serie doppia, che comparisce in questa relazione, non supera $|a_n|\, e^{-\lambda_n \sigma(x)}\, e^{\lambda_m(\sigma(x) - \sigma_0)}$; quindi la serie converge uniformemente, rispetto a t, nell'intervallo $(\omega(-x)\,, \omega(x))$. Si avrà dunque

$$\int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} f(\sigma(x) + it)\, G(\sigma(x) - s_0 + it)\, dt = [\omega(x) - \omega(-x)] \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\lambda_n s_0} +$$

$$+ \sum_{m \neq n} a_n\, e^{-\lambda_n \sigma(x)}\, e^{\lambda_m(\sigma(x) - s_0)} \int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} e^{(\lambda_m - \lambda_n)\,it}\, dt\,,$$

cioè

$$(7)\quad \frac{1}{[\omega(x)-\omega(-x)]}\int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} f(\sigma(x)+it)\,\mathrm{G}(\sigma(x)-s_0+it)\,dt =$$

$$= f(s_0)+\sum_{m \neq n} a_n\, e^{-\lambda_n\sigma(x)}\, e^{\lambda_m(\sigma(x)-s_0)} \frac{\displaystyle\int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} e^{(\lambda_m-\lambda_n)it}\,dt}{\omega(x)-\omega(-x)}.$$

Si ha intanto

$$\frac{\displaystyle\int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} e^{(\lambda_m-\lambda_n)it}}{\omega(x)-\omega(-x)} = \frac{\cos(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(x)-\cos(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(-x)}{[\omega(x)-\omega(-x)]\,(\lambda_m-\lambda_n)\,i} +$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(x)-\operatorname{sen}(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(-x)}{[\omega(x)-\omega(-x)]\,(\lambda_m-\lambda_n)} = -i\operatorname{sen}\xi_1+\cos\xi_2\,,$$

essendo ξ_1 e ξ_2 due convenienti valori compresi tra $(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(-x)$ e $(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(x)$. Tenendo conto di questa relazione e della (5), si conclude che il termine generale della serie che comparisce nel secondo membro della (7), se per qualunque n è $\lambda_n \geq 0$, non supera $2\,|a_n|\,e^{-\lambda_n(\beta+\eta)}\,e^{-\lambda_m\eta}$, che è il termine generale di una serie doppia convergente; quindi la serie che comparisce nel secondo membro della (7), i cui termini sono funzioni di x, converge uniformemente rispetto ad x; e, siccome ognuno dei termini tende a zero quando x tende ad ∞, anche la serie avrà per limite zero quando x tende ad ∞. Resta così dimostrata la (6), che comprende, come caso particolare, la (5) della Nota I. La dimostrazione viene leggermente modificata se qualcuna delle λ_n è negativa.

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari di integrali riducibili.* Nota di Gaetano Scorza, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

In un lavoro d'insieme, che sarà pubblicato altrove, verranno raccolte, rimaneggiate e approfondite le ricerche che, da un pezzo in qua, son venuto facendo sulla teoria degli integrali abeliani riducibili [1]; e verrà anche lumeggiato il fondo aritmetico comune a questa teoria e alle teorie affini (trasformazione delle funzioni abeliane, funzioni abeliane a moltiplicazione

[1] Scorza: *a*) *Sugli integrali abeliani riducibili*, Note I, II e III (questi Rendiconti, 7 marzo, 21 marzo e 7 novembre 1915); *b*) *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo*, Note I e II (ibid., settembre e ottobre 1915); *c*) *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili* (ibid., 21 novembre 1915); *d*) *Sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili* (ibid., 19 dicembre 1915).