ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

cioè

$$(7)\qquad \frac{1}{[\omega(x)-\omega(-x)]}\int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} f(\sigma(x)+it)\,\mathrm{G}(\sigma(x)-s_0+it)\,dt =$$

$$= f(s_0) + \sum_{m \neq n} a_n\, e^{-\lambda_n\sigma(x)}\, e^{\lambda_m(\sigma(x)-s_0)} \frac{\displaystyle\int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} e^{(\lambda_m-\lambda_n)it}\,dt}{\omega(x)-\omega(-x)}.$$

Si ha intanto

$$\frac{\displaystyle\int_{\omega(-x)}^{\omega(x)} e^{(\lambda_m-\lambda_n)it}}{\omega(x)-\omega(-x)} = \frac{\cos(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(x)-\cos(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(-x)}{[\omega(x)-\omega(-x)]\,(\lambda_m-\lambda_n)\,i} +$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(x)-\operatorname{sen}(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(-x)}{[\omega(x)-\omega(-x)]\,(\lambda_m-\lambda_n)} = -i\operatorname{sen}\xi_1+\cos\xi_2\,,$$

essendo ξ_1 e ξ_2 due convenienti valori compresi tra $(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(-x)$ e $(\lambda_m-\lambda_n)\,\omega(x)$. Tenendo conto di questa relazione e della (5), si conclude che il termine generale della serie che comparisce nel secondo membro della (7), se per qualunque n è $\lambda_n \geq 0$, non supera $2\,|a_n|\,e^{-\lambda_n(\beta+\eta)}\,e^{-\lambda_m\eta}$, che è il termine generale di una serie doppia convergente; quindi la serie che comparisce nel secondo membro della (7), i cui termini sono funzioni di x, converge uniformemente rispetto ad x; e, siccome ognuno dei termini tende a zero quando x tende ad ∞, anche la serie avrà per limite zero quando x tende ad ∞. Resta così dimostrata la (6), che comprende, come caso particolare, la (5) della Nota I. La dimostrazione viene leggermente modificata se qualcuna delle λ_n è negativa.

Matematica. — *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari di integrali riducibili.* Nota di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

In un lavoro d'insieme, che sarà pubblicato altrove, verranno raccolte, rimaneggiate e approfondite le ricerche che, da un pezzo in qua, son venuto facendo sulla teoria degli integrali abeliani riducibili [1]; e verrà anche lumeggiato il fondo aritmetico comune a questa teoria e alle teorie affini (trasformazione delle funzioni abeliane, funzioni abeliane a moltiplicazione

[1] Scorza: *a) Sugli integrali abeliani riducibili*, Note I, II e III (questi Rendiconti, 7 marzo, 21 marzo e 7 novembre 1915); *b) Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo*, Note I e II (ibid., settembre e ottobre 1915); *c) Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili* (ibid., 21 novembre 1915); *d) Sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili* (ibid., 19 dicembre 1915).

complessa, corrispondenze algebriche fra curve algebriche, ecc.), facendo vedere come esse si innestino tutte su quella che si proporrà di chiamare *teoria delle matrici di Riemann*.

Poichè fino ad ora i risultati dei miei studî sono comparsi nei Rendiconti di questa illustre Accademia, non mi pare inopportuno raccogliere qui gli enunciati delle nuove proposizioni a cui son pervenuto, riferendole, come sempre, e per brevità, soltanto alle varietà algebriche di irregolarità superficiale non nulla. In attesa delle dimostrazioni (molto semplici, del resto), non è male aver subito sott'occhio le linee essenziali di tutta la teoria.

1. Una varietà algebrica, di irregolarità superficiale $p > 0$, o, come anche diremo, *una* V_p, si dirà *pura* od *impura*, secondo che è puro od impuro il sistema totale dei suoi integrali semplici di 1ª specie (¹); ossia, secondo che non contiene o contiene sistemi regolari di integrali riducibili.

2. Chiameremo *carattere simultaneo di Riemann*, o, semplicemente, *carattere simultaneo* di una V_p e di una $V_{p'}$, sulle cui riemanniane siano stati fissati due sistemi di cicli lineari indipendenti

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p} \quad \text{e} \quad \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_{2p'},$$

il massimo numero λ di forme bilineari, linearmente indipendenti, a coefficienti (razionali, o addirittura) interi, in due serie di variabili

$$x_1, x_2, \ldots, x_{2p} \quad ; \quad y_1, y_2, \ldots, y_{2p'}$$

che prendono il valor zero, quando per la x_j si pone il periodo al ciclo σ_j di un qualsiasi integrale di V_p, e per la y_l si pone il periodo al ciclo σ'_l di un qualsiasi integrale di $V_{p'}$.

L'intero λ, indipendente dalla scelta dei cicli σ e σ' sulle riemanniane di V_p e $V_{p'}$, è assoggettato alle diseguaglianze

$$0 \leq \lambda \leq 2pp' ; \tag{1}$$

e il valore $2pp'$ può essere effettivamente raggiunto, qualunque siano p e p' (cfr. il n. 14).

3. Una V_p e una $V_{p'}$ si diranno *vincolate* o *non vincolate*, secondo che il loro carattere simultaneo di Riemann è positivo o nullo.

4. Nella definizione del n. 2 non è escluso che le due varietà considerate coincidano (cosicchè $p' = p$); anzi, se ciò accade, risulta sempre $\lambda \geq 1$.

In tal caso, però, ove non sia necessario di considerare le due varietà come distinte, piuttosto che del carattere simultaneo λ di una varietà e sè

(¹) Cfr. loc. cit. ¹), *d*). Avvertiamo poi che, secondo il solito, quando nel testo parliamo di integrali, senz'altro, intendiamo sempre che si tratti di integrali semplici di 1ª specie.

stessa, parleremo del suo *indice di moltiplicabilità* h, che definiremo mediante l'eguaglianza

$$h = \lambda - 1 .$$

Per l'indice di moltiplicabilità h di una V_p, avente l'indice di singolarità k, si hanno le limitazioni

$$(2) \qquad 0 \leq k \leq h \leq 2p^2 - 1 ;$$

e le V_p, per cui $h = 2p^2 - 1$, sono, per $p = 1$, quelle il cui integrale ellittico è a moltiplicazione complessa e, per $p > 1$, quelle il cui indice di singolarità è massimo, cioè è dato da $k = p^2 - 1$.

Una V_p, per cui risulti $h \geq 2p$, contiene necessariamente infiniti sistemi regolari di integrali riducibili; e quindi, *se una* V_p *è pura, il suo indice di moltiplicabilità è certo inferiore a* $2p$.

5. Alla nozione di indice di moltiplicabilità di una V_p si può pervenire anche in altro modo.

Si rappresentino, nella maniera che abbiamo più volte indicato, gli integrali della V_p mediante i punti di un S_{p-1}, τ, di un S_{2p-1}, Σ, nel quale sia stato prefissato un sistema di coordinate proiettive omogenee.

Allora, dire che h è l'indice di moltiplicabilità della nostra V_p, equivale a dire che $h + 1$ *è il massimo numero di omografie razionali di* Σ *linearmente indipendenti che mutano* τ *in sè stesso.*

Il gruppo costituito dalle omografie razionali di Σ che mutano τ in sè stesso, e che è un gruppo identico o un gruppo infinito discontinuo secondo che h è nullo o positivo, si dirà il *gruppo di moltiplicabilità* della V_p presa in esame, poichè, data la V_p, esso è individuato in Σ, a meno di una trasformazione omografica razionale.

Esso contiene omografie singolari quando e solo quando la V_p è impura; e in tal caso la configurazione degli assi delle sue omografie singolari (che son tutte di specie pari) coincide con quella degli assi dei sistemi regolari di integrali riducibili della varietà. Inoltre esso induce su τ un gruppo di omografie a cui è oloedricamente isomorfo, tranne soltanto il caso in cui la V_p sia ad indice di moltiplicabilità massimo.

Notisi, infine, che il gruppo di moltiplicabilità di una V_p impura opera sugli assi dei suoi sistemi regolari puri in modo assolutamente transitivo, quando e solo quando la V_p non contiene sistemi regolari isolati.

6. Il gruppo di moltiplicabilità della V_p considerata nel n. precedente consta di omografie (razionali) appartenenti tutte a un sistema lineare ∞^h. Ebbene, questo sistema costituisce a sua volta, come è ben naturale, un gruppo, continuo, finito, ad h parametri, di cui il primo è un sottogruppo.

7. Le definizioni e considerazioni dei nn. 2 , ... , 6 si estendono immediatamente ai sistemi regolari di integrali riducibili appartenenti a una

stessa varietà o a varietà differenti, ai corpi di funzioni abeliane e alle curve algebriche.

In particolare si ha che:

Una funzione abeliana è, o non è, a moltiplicazione complessa, secondo che il suo indice di moltiplicabilità è positivo o nullo (donde la denominazione introdotta);

e che:

Il numero base delle corrispondenze fra due curve (*distinte o non*) *è il loro carattere simultaneo di Riemann.*

Inoltre il lettore riconoscerà subito che, per il caso delle curve, alcune delle proprietà incontrate si trovano già in una recente e importante Nota del sig. Rosati [1]. Nel qual caso, ciò che noi chiamiamo indici di singolarità e moltiplicabilità di una curva sono dati, colle notazioni del sig. Rosati, da $\mu_1 - 1$ e $\mu_1 + \mu_2 - 1$, μ_1 e μ_2 essendo quelli che egli chiama numeri-base delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche appartenenti alla curva.

8. Assegnando un significato più stretto a una denominazione già introdotta precedentemente [2], due V_p, che abbiano gli stessi indici di singolarità e moltiplicabilità, si diranno *isomorfe* quando sono entrambe pure, o quando sono entrambe impure e può stabilirsi tra i sistemi lineari dei loro integrali una tale omografia (non singolare) che i sistemi regolari dell'una si riflettano in quelli dell'altra, due sistemi omologhi riuscendo sempre (della stessa dimensione, e) con gli stessi indici di singolarità e moltiplicabilità.

Anche questa definizione intendiamo estesa ai sistemi regolari di integrali riducibili, ai corpi di funzioni abeliane e alle curve.

Notisi subito che, non ostante il significato più stretto attribuito qui alla relazione di isomorfismo, restano veri i teoremi che si trovano nel lavoro già citato, ove la nozione in discorso era adoperata in senso più lato. Basta guardare le dimostrazioni che restano inalterate, per persuadersene.

Cosicchè possiamo sempre asserire che:

Due sistemi regolari di una V_p, *aventi su di essa uno stesso complementare sono necessariamente isomorfi*;

e che:

Se una V_p *impura non ammette sistemi regolari isolati, i suoi sistemi puri sono tutti isomorfi*; ecc.

Anzi, a quest'ultimo teorema può darsi, per quel che segue, una portata più larga; può dirsi, cioè, che, *se una* V_p *impura è priva di sistemi rego-*

[1] Rosati, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* (questi Rendiconti, agosto 1915).

[2] Loc. cit. [1], *d*).

lari isolati, due suoi sistemi regolari sono senz'altro isomorfi appena abbiano la stessa dimensione.

9. Se una V_p e una $V_{p'}$ sono vincolate ed è $p \neq p'$, quella di irregolarità superficiale maggiore è certamente impura.

Una V_p e una $V_{p'}$ pure non possono essere vincolate se non a patto che siano isomorfe (per modo che, intanto, $p' = p$); e, in caso affermativo, il loro carattere simultaneo di Riemann, diminuito di 1, dà il loro comune indice di moltiplicabilità.

Due V_p pure vincolate a una terza, egualmente pura, sono vincolate fra di loro.

Ogni forma bilineare a coefficienti interi, atta ad esprimere che due V_p pure sono vincolate, ha necessariamente diverso da zero il determinante formato coi suoi coefficienti.

In quest'ultima proposizione, grazie a quanto viene osservato alla fine del n. seguente, è contenuta la completa generalizzazione di un bel teorema dovuto al sig. De Franchis (¹).

10. Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n (≥ 2) sistemi regolari indipendenti di una V_p impura, il cui sistema congiungente coincida col sistema totale degli integrali di V_p; e diciamo k ed h, k_j e h_j gli indici di singolarità e moltiplicabilità della V_p e di A_j, rispettivamente; poi chiamiamo λ_{jl} il carattere simultaneo di A_j e A_l.

Allora valgono le formule

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 + \Sigma\lambda_{jl} \tag{3}$$

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n + n - 1 + 2\Sigma\lambda_{jl}, \tag{4}$$

dove i sommatori dei secondi membri si intendono estesi a tutte le combinazioni binarie degli indici $1, 2, \ldots, n$.

La seconda discende subito dal fatto che, se si indica con λ il carattere simultaneo di Riemann della V_p considerata e di una qualsiasi $V_{p'}$, e si chiama λ_j quello di questa $V_{p'}$ e del sistema A_j, si ha

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n. \tag{5}$$

Supponendo $n = 2$, cioè A_1 e A_2 complementari su V_p, la (3) dimostra che il carattere simultaneo di Riemann di A_1 e A_2 coincide con quello che altrove (²) abbiamo chiamato coefficiente di immersione di A_1 o A_2 su V_p. Seguono, allora, parecchie interessanti interpretazioni del significato di codesto coefficiente di immersione.

(¹) De Franchis, *Le varietà algebriche con infiniti integrali ellittici* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXXVIII, 2° sem. 1914, pag. 192).

(²) Loc. cit. ¹), *a*), III.

11. Come caso particolare delle (3) e (4) si ha immediatamente che:

Se una V_p *impura è priva di sistemi regolari isolati, detti* k_1, h_1 *e* $q-1$ *l'indice di singolarità, l'indice di moltiplicabilità e la dimensione di un suo qualsiasi sistema regolare puro, posto* $\frac{p}{q}=n$ *(dove* n *risulta necessariamente intero), gli indici di singolarità e moltiplicabilità* k *e* h *di* V_p *sono dati dalle eguaglianze*

$$k = nk_1 + \frac{n(n-1)}{2} h_1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2} \tag{6}$$

$$h = n^2(h_1+1) - 1 . \tag{7}$$

Notisi che, per le ipotesi fatte, si ha inoltre $k_1 < 2q-1$ e $h_1 < 2q$.

Crediamo inutile trascrivere le formule che si hanno per una V_p impura qualsiasi, partendo da un suo gruppo fondamentale di sistemi puri. E tralasciamo pure alcune formule che riguardano il carattere simultaneo di una V_p e una $V_{p'}$ impure.

12. Risulta già, dalle Note precedenti, che il problema della classificazione in tipi delle V_p impure, per ogni valore assegnato di p, ove si intenda di considerare come appartenenti a uno stesso tipo due V_p impure isomorfe, si riconduce a quello della classificazione delle V_p impure prive di sistemi regolari isolati.

Ebbene, per queste ultime in base a una conveniente inversione dell'ultimo teorema enunciato che risolve subito le quistioni di esistenza, il problema si riconduce a quello della determinazione dei varii tipi di V_q *pure* non isomorfe, essendo q un divisore di p, inferiore a p.

Quest'ultimo problema, per $q=1$, è di risoluzione immediata; e per $q=2$ è stato implicitamente risoluto dal sig. Rosati. Dunque si ottengono subito i tipi di V_p impure, prive di sistemi regolari isolati, i cui sistemi puri o sono integrali ellittici, o sono sistemi ∞^1 di integrali a 4 periodi.

Nel primo caso essi sono due, con gli indici k e h dati rispettivamente da

$$k = \frac{(p-1)(p+2)}{2} , \; h = p^2 - 1 \tag{I}$$

$$k = p^2 - 1 , \; h = 2p^2 - 1 ; \tag{II}$$

e si trovano descritti nella chiusa di una Nota precedente [1]; nel secondo caso (dove p è necessariamente pari) i tipi sono quattro, e per ciascun tipo gli indici k e h sono dati da

[1] Loc. cit. [1]), *d*).

(I) $$k = \frac{(p-2)(p+4)}{8}\,, \quad h = \frac{p^2}{4} - 1\,;$$

(II) $$k = \frac{p^2 + 2p - 4}{4}\,, \quad h = \frac{p^2}{2} - 1\,;$$

(III) $$k = \frac{p^2 - 2}{2}\,, \quad h = p^2 - 1\,;$$

(IV) $$k = \frac{(p-1)(p+2)}{2}\,, \quad h = p^2 - 1\,.$$

13. Anche le V_3 impure si possono classificare tutte, tenendo conto delle cose precedenti; si trovano 18 tipi, e per ogni tipo si caratterizzano nettamente, come nei casi precedenti, i sistemi regolari di integrali riducibili esistenti.

14. Relativamente ai caratteri k, h e λ, quivi introdotti, vi è da osservare che, tranne per i valori più bassi di p e p', *nessuno di essi può assumere tutti i valori di cui* a priori *sarebbe capace*, cioè tutti i valori interi soddisfacenti alle diseguaglianze che vincolano k, h e λ.

Così k per $p=2$ può assumere i valori $0, 1, 2, 3$, ma già per $p=3$ non può assumere che i valori $0, 1, 2, 3, 4, 5, 8$; h per $p=1$ può essere 0 o 1, ma già per $p=2$ non può assumere che i valori $0, 1, 2, 3, 7$ (Rosati) e per $p=3$ non può assumere che i valori $0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 17$; e λ, che per $p=p'=1$ può essere $0, 1$ o 2, già per $p=1$ e $p=2$ non può assumere che i valori $0, 1, 2, 4$. E gli esempî potrebbero esser moltiplicati.

Determinare per tutti i valori di p o di p e p' *tutte* le *lacune* di k, h e λ non è forse agevole. Ma sul proposito possiamo già dare delle indicazioni generali, a cui potremmo dare anche maggior precisione se non fosse che dovremmo entrare in considerazioni troppo minute.

Così, se $p > 3$, son certo delle lacune per k tutti i numeri della serie
$$(p-1)^2 + 1\,, (p-1)^2 + 2\,, \ldots, p^2 - 2\,;$$
se $p > 1$, son certo delle lacune per h tutti i numeri della serie
$$2(p-1)^2 + 2\,, 2(p-1)^2 + 3\,, \ldots, 2p^2 - 2\,;$$
e se $p' \geq p$, son certo delle lacune per λ tutti i numeri della serie
$$2p(p'-1) + 1\,, 2p(p'-1) + 2\,, \ldots, 2pp' - 1\,.$$

Queste affermazioni si deducono abbastanza agevolmente da proposizioni di cui citiamo soltanto le più interessanti. Esse sono le seguenti:

Se una V_p *impura, con i soliti indici* k *e* h, *possiede sistemi regolari isolati* (*nel qual caso ne contiene* $2^n - 2$, *con* $2 \leq n \leq p$), *si ha*

$$k \leq (p - n + 1)^2 + n - 2 \quad e \quad h \leq 2(p - n + 1)^2 + 2n - 3 .$$

Se λ *è il carattere simultaneo di Riemann di una* V_p *e una* $V_{p'}$, *secondo che* V_p *e* $V_{p'}$ *sono entrambe pure* (*nel qual caso, ove sia* $\lambda > 0$, *è* $p = p'$), *o sono la prima pura e la seconda impura, si ha* $\lambda \leq 2p$, *oppure* $\lambda \leq 2p'$. *Se sono entrambe impure, si ha* $\lambda = 2pp'$ *quando, e solo quando,* V_p *e* $V_{p'}$ *sono a indice di moltiplicabilità massimo; se sono entrambe impure, e almeno una non contiene integrali ellittici, si ha* $\lambda \leq pp'$; *se sono entrambe impure, ed almeno una, supponiamo la* $V_{p'}$, *non è ad indice di moltiplicabilità massimo, si ha* $\lambda \leq 2p(p' - 1)$.

Fisica. — *Intorno ad alcune particolarità del raggio verde.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

Il così detto raggio verde (ossia i primi raggi del sole che incomincia a spuntare sull'orizzonte, e gli ultimi del sole che tramontando scompare, i quali di solito sono verdi o azzurri, spesso molto brillanti) è stato attribuito a tre cause diverse: la rifrazione e dispersione atmosferica, l'assorbimento atmosferico, una illusione ottica per effetto di contrasto.

La prima di queste cause, la cui azione non può esser messa in dubbio, è certamente la più importante, le altre due possono essere concomitanti e modificare la colorazione e forse la durata del raggio.

Il sole presso all'orizzonte, osservato con un cannocchiale di mediocre ingrandimento, e con una sufficiente diminuzione dello splendore, presenta sempre ben visibili un orlo rosso nella metà inferiore, e un orlo verde o azzurro nella metà superiore, orli che senza dubbio sono prodotti dalla rifrazione atmosferica che devìa più i raggi verdi o azzurri che non i rossi. I raggi indaco violetto, e quelli ultravioletti più deviati dell'azzurro, sono completamente assorbiti quando il sole è presso l'orizzonte. L'orlo verde o azzurro, naturalmente, spunta prima, e tramonta dopo della parte bianca abbagliante del disco solare, producendo così il raggio verde.

F. Exner (*Pernter. Meteorologische Optik*, pag. 799), per spiegare la durata reale del raggio verde che di solito è maggiore di quella teorica, suppone che questo possa esser dovuto all'assorbimento dei raggi rossi prodotto dal vapor acqueo degli strati inferiori dell'atmosfera, dimodochè esso incomincierebbe a prodursi quando la parte bianca del disco solare non è ancora interamente tramontata. La colorazione così prodotta non sarebbe visibile quando lo è una gran parte del disco solare, sia perchè questa è troppo