ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

simi di pressione corrispondono al minimo gradiente termico, e si hanno in febbraio e ottobre, cioè quando la temperatura del mare raggiunge i valori annui estremi. I minimi di pressione corrispondono al massimo gradiente, e si hanno in aprile e dicembre, quando la terra, riscaldandosi nel primo caso e raffreddandosi nel secondo caso più rapidamente del mare, presenta la massima differenza di temperatura rispetto al mare. In quanto all'inflessione in giugno, questa corrisponde al minimo gradiente termico tra l'equatore e il polo, gradiente che si ha nel solstizio d'estate; il minimo di luglio corrisponde al brusco incremento che in questo mese subisce il detto gradiente.

Geofisica. — *Teoria generale delle onde propagate sulla superficie piana di un solido elastico.* Nota di LUIGI DE MARCHI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Le equazioni generali dell'elasticità

$$l\frac{\partial^2 u}{dt^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta_2 u \tag{1}$$

e analoghe per v, w, dove

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

sono soddisfatte da integrali del tipo

$$u=c_1 e^{\sigma} \qquad v=c_2 e^{\sigma} \qquad w=c_3 e^{\sigma}$$

ove $\sigma=lx+my+nz-pt$, essendo $c_1, c_2, c_3, l, m, n, p$ costanti reali, o imaginarie, o complesse.

Assumiamo come piano xy il piano superficiale, e l'asse delle z diretto verso l'interno del solido, con l'origine in un punto qualunque della superficie che, nel caso dell'applicazione alle onde sismiche, potrà essere l'epicentro. Volendo che gli integrali $u\,v\,w$ non crescano indefinitamente col crescere di $x\,y$ tanto in direzione positiva quanto in direzione negativa, dobbiamo assumere le costanti $l\,m$ come imaginarie. La costante p può essere complessa; e volendo che gli integrali si mantengano finiti per tutti i valori di t, la parte reale $-q$ dovrà essere negativa. Allora entra nelle espressioni di u, v, w un fattore e^{-qt} che rappresenta uno smorzamento, col tempo, della deformazione elastica. Trascuriamo per ora questo smorzamento, ponendo $q=0$.

Se anche n si suppone imaginaria, gli integrali ci rappresentano le vibrazioni elastiche comuni. Lord Rayleigh [1] considera invece un'onda che sia provocata da una deformazione iniziale della superficie e si propaghi su questa, attenuandosi rapidamente con la profondità, come le onde in acqua molto profonda.

Considerando il caso di un solido indefinito, egli pone perciò n reale e negativa, dicendo che lo studio più generale delle onde superficiali di una lastra di spessore finito a facce piane parallele non lo condusse a risultati degni di rilievo.

Per le applicazioni alle onde sismiche principali, che ci riserviamo di studiare in una Memoria successiva si deve però considerare questo caso più generale, sia perchè ora si ammette l'esistenza di una crosta terrestre, separata dal nucleo centrale da uno strato magmatico, sia perchè si deve ammettere che nella regione ipocentrica, dove ha origine la perturbazione sismica (che è generalmente non molto profonda e può essere molto estesa), si mantengano per un certo tempo delle vibrazioni propagantisi dal basso all'alto.

La trattazione del caso generale permette inoltre una formulazione molto più semplice e simmetrica dei risultati.

2. Poniamo quindi

$$\pm i\sigma = \pm i(\alpha x + \beta y - \varepsilon t) \;\; ; \;\; n = \pm \gamma$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ sono costanti positive. Possiamo semplificare le formole disponendo l'asse delle x nella direzione di propagazione, con una rotazione degli assi x, y per la quale $\beta = 0$. Gli integrali più generali delle equazioni (1)

$$u = A_1 e^{\gamma z} e^{i\sigma} + A_2 e^{-\gamma z} e^{i\sigma} + A_3 e^{\gamma z} e^{-i\sigma} + A_4 e^{-\gamma z} e^{-i\sigma} \tag{2}$$

e analoghi, sono quindi funzioni indipendenti da y, e tale è anche θ. La equazione dell'elasticità relativa alla componente v assume quindi una forma propria

$$\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \Delta_2 v \tag{1bis}$$

e noi possiamo perciò studiare separatamente la componente della deformazione nel piano verticale (xz) di propagazione, dalla componente nel piano verticale (yz) normale ad esso.

Consideriamo anzitutto la prima componente (uw).

[1] Rayleigh (Lord), *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.* Scient. Papers, II, pag. 441.

Le costanti A_r possono essere numeri complessi; ma, volendo che $u\, w$ si conservino reali, si dimostra facilmente che le (2) sono della forma

$$u = (A_{11}\, e^{\gamma z} + A_{12}\, e^{-\gamma z}) \cos\sigma + (A_{21}\, e^{\gamma z} + A_{22}\, e^{-\gamma z}) \,\mathrm{sen}\,\sigma$$

$$w = (C_{11}\, e^{\gamma z} + C_{12}\, e^{-\gamma z}) \cos\sigma + (C_{21}\, e^{\gamma z} + C_{22}\, e^{-\gamma z}) \,\mathrm{sen}\,\sigma$$

essendo le A_{rs} C_{rs} costanti reali.

Indichiamo con $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$ il coseno e il seno iperbolico dell'argomento γz $\left(\mathbf{C} = \frac{1}{2}(e^{\gamma z} + e^{-\gamma z})\ ,\ \mathbf{S} = \frac{1}{2}(e^{\gamma z} - e^{-\gamma z})\right)$: gli integrali si possono allora scrivere sotto la forma

$$(3)\qquad \begin{cases} u = (a\,\mathbf{C} + b\,\mathbf{S}) \cos\sigma + (c\,\mathbf{C} + k\,\mathbf{S}) \,\mathrm{sen}\,\sigma \\ w = (a'\mathbf{C} + b'\mathbf{S}) \cos\sigma + (c'\mathbf{C} + d'\mathbf{S}) \,\mathrm{sen}\,\sigma\,, \end{cases}$$

a, b, c, d, a', b', c', d' designando nuove costanti (ovvie combinazioni delle A_{rs}, C_{rs}).

Ricordiamo che per $z = 0$ è $\mathbf{C} = 1$ $\mathbf{S} = 0$, e che, per tutti i valori di z, $\mathbf{C}' = \gamma\mathbf{S}$, $\mathbf{S}' = \gamma\mathbf{C}$ dove con $\mathbf{C}'$ $\mathbf{S}'$ si intendono le derivate rispetto a z.

Dalle (3) si ricava

$$(4)\qquad \Delta_2 u = (\gamma^2 - \alpha^2)\, u \qquad \Delta_2 w = (\gamma^2 - \alpha^2)\, w$$

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\varepsilon^2 u \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\varepsilon^2 w$$

$$(6)\qquad \theta = [(\alpha c + \gamma b')\,\mathbf{C} + (\alpha d + \gamma a')\,\mathbf{S}] \cos\sigma + \\ + [(\gamma d' - \alpha a)\,\mathbf{C} + (\gamma c' - \alpha b)\,\mathbf{S}] \,\mathrm{sen}\,\sigma\,.$$

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni generali per u e w, e considerando che queste debbono essere soddisfatte per tutti i valori di x, t e z, dovremo annullare prima separatamente i coefficienti di $\cos\sigma$ e $\mathrm{sen}\,\sigma$ e poi in ciascuno di essi i coefficienti di $\mathbf{C}$ e $\mathbf{S}$.

Indichiamo con A B C D i coefficienti di $\mathbf{C}$ e $\mathbf{S}$ nell'espressione (6) di θ, nell'ordine in cui essi vi figurano, e con Π l'espressione $\mu(\gamma^2 - \alpha^2) + \varepsilon^2 \varrho$. Allora le condizioni indicate per la verifica delle equazioni si possono scrivere

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} (\lambda + \mu)\,\alpha\,C + \Pi a &= 0 \\ (\lambda + \mu)\,\alpha\,D + \Pi b &= 0 \\ -(\lambda + \mu)\,\alpha\,A + \Pi c &= 0 \\ -(\lambda + \mu)\,\alpha\,B + \Pi d &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} (\lambda + \mu)\,\gamma\,B + \Pi a' &= 0 \\ (\lambda + \mu)\,\gamma\,A + \Pi b' &= 0 \\ (\lambda + \mu)\,\gamma\,D + \Pi c' &= 0 \\ (\lambda + \mu)\,\gamma\,C + \Pi d' &= 0 \end{aligned}\right.$$

Questi due gruppi di condizioni possono essere simultaneamente soddisfatti in due modi. Nell'ipotesi di Π diverso da 0 (tali essendo, per ipotesi, anche α e γ), il confronto del primo col secondo gruppo ci dà

$$\frac{d'}{a}=\frac{c'}{b}=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad \frac{b'}{c}=\frac{a'}{d}=-\frac{\gamma}{\alpha} \tag{8}$$

mercè le quali, tutte le equazioni si riducono all'unica

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}\,\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\,. \tag{9}$$

Nell'ipotesi, invece, che sia $\Pi=0$, cioè

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}\,\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \tag{10}$$

le equazioni si riducono ad $A=B=C=D=0$, cioè

$$\frac{d'}{a}=\frac{c'}{b}=\frac{\alpha}{\gamma} \qquad \frac{b'}{c}=\frac{a'}{d}=-\frac{\alpha}{\gamma}\,. \tag{11}$$

Questi due modi di soluzione rappresentano due sistemi di onde elastiche nel piano xz propagantisi il primo con velocità $\frac{\varepsilon}{\alpha}$, definita dalla (9), il secondo con quella definita dalla (10).

Indicando con $u_1\ w_1$ le componenti dello spostamento nel primo sistema, con $u_2\ w_2$ quelle nel secondo, e le relative costanti coi relativi indici, avremo

$$\begin{cases} u_1=(a_1C+b_1S)\cos\sigma+(c_1C+d_1S)\,\mathrm{sen}\,\sigma \\ w_1=-\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(d_1C+c_1S)\cos\sigma+\frac{\gamma_1}{\alpha_1}(b_1C+a_1S)\,\mathrm{sen}\,\sigma \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} u_2=(a_2C+b_2S)\cos\sigma+(c_2C+d_2S)\,\mathrm{sen}\,\sigma \\ w_2=-\frac{\alpha_2}{\gamma_2}(d_2C+c_2S)\cos\sigma+\frac{\alpha_2}{\gamma_2}(b_2C+a_2S)\,\mathrm{sen}\,\sigma \end{cases} \tag{13}$$

La soluzione completa è definita da $u=u_1+u_2 \quad w=w_1+w_2$.

È facile verificare che il primo sistema è irrotazionale, essendo $\frac{\partial u_1}{\partial z}-\frac{\partial w_1}{\partial x}=0$; il secondo è a dilatazione θ nulla essendo $A=B=C=D=0$. Quindi il primo è di onde *longitudinali*, il secondo di onde *trasversali*.

3. La componente v soddisfa alla equazione $(1)^{\text{bis}}$ che si può scrivere

$$[\mu(\gamma^2-\alpha^2)+\varepsilon^2\varrho]\,v=0 \tag*{$(1)^{\text{ter}}$}$$

la quale è soddisfatta o da $v=0$, nel qual caso la vibrazione è nel piano xz, o da

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}\,\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}\,.$$

Essa è quindi la componente v_2 della vibrazione trasversale, la quale si compie in generale in un piano inclinato dell' *angolo di emergenza* sulla verticale.

4. La soluzione completa deve soddisfare in superficie, cioè per $z=0$, alle equazioni di condizione

$$(14)\qquad \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad \lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\,.$$

Osserviamo anzitutto che nella seconda è $\frac{\partial w}{\partial y}=0$, e la v si riduce alla v_2. Ponendo

$$v_2=(e\mathrm{C}+f\mathrm{S})\cos\sigma_2+(g\mathrm{C}+h\mathrm{S})\,\mathrm{sen}\,\sigma_2$$

essa ci dà

$$\left(\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)_{z=0}=f\cos\sigma_2+h\,\mathrm{sen}\,\sigma_2=0$$

che, dovendo verificarsi per tutti i valori di σ_2, determina

$$f=0 \qquad h=0\,.$$

Gli altri due coefficienti e, g rimangono indeterminati, finchè non si assegnino altre condizioni.

La prima delle (14), dove siano introdotte le espressioni (12) (13), e sia posto $\mathrm{S}=0$ $\mathrm{C}=1$, dovendo essere soddisfatta per tutti i valori di x e di t, impone anzitutto la condizione $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, cioè

$$(15)\qquad \alpha_1=\alpha_2=\alpha \qquad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$$

e poi l'annullamento separato dei coefficienti di $\cos\sigma$, $\mathrm{sen}\,\sigma$, cioè

$$2\gamma_1 b_1+\left(\gamma_2+\frac{\alpha^2}{\gamma_2}\right)b_2=0$$

$$2\gamma_1 d_1+\left(\gamma_2+\frac{\alpha^2}{\gamma_2}\right)d_2=0$$

che si possono scrivere

$$(16)\qquad \frac{b_2}{b_1}=\frac{d_2}{d_1}=\mathrm{K} \qquad \mathrm{K}=-\frac{2\gamma_1\gamma_2}{\alpha^2+\gamma_2^2}$$

dove K è una costante numerica.

Per calcolare la terza delle (14), osserviamo anzitutto che la θ, espressa dalla (6), si riduce alla θ_1, la quale per le (8) ha l'espressione

$$\theta_1 = \frac{\alpha^2 - \gamma_1^2}{\alpha^2} \left\{ (c_1 \mathrm{C} + d_1 \mathrm{S}) \cos \sigma - (a_1 \mathrm{C} + b_1 \mathrm{S}) \operatorname{sen} \sigma \right\}.$$

Introducendo nell'equazione questa espressione, e quella di $\frac{\partial(w_1 + w_2)}{\partial z}$ in base alle (12) (13), e ponendo $\mathrm{S} = 0 \quad \mathrm{C} = 1$, si hanno le due condizioni

$$\lambda \frac{\alpha^2 - \gamma_1^2}{\alpha} c_1 - 2\mu \frac{\gamma_1^2}{\alpha} c_1 - 2\mu\alpha\, c_2 = 0$$

$$\lambda \frac{\alpha^2 - \gamma_1^2}{\alpha} a_1 - 2\mu \frac{\gamma_1^2}{\alpha} a_1 - 2\mu\alpha\, a_2 = 0$$

che si possono scrivere

$$\text{(17)} \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{c_2}{c_1} = \mathrm{L} \qquad \mathrm{L} = \frac{\lambda}{2\mu} - \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \frac{\gamma_1^2}{\alpha^2}$$

dove L è, come K, una costante numerica. L rappresenta, in valore assoluto, il rapporto fra l'ampiezza $\sqrt{a_2^2 + c_2^2}$ della vibrazione trasversale e quella $\sqrt{a_1^2 + c_1^2}$ della longitudinale nel movimento *oscillatorio* (u) del piano, nella direzione di propagazione dell'onda; mentre K rappresenta l'analogo rapporto per il movimento *sussultorio* (w).

5. Le quattro costanti $\gamma_1 \; \gamma_2 \; \mathrm{K} \; \mathrm{L}$ sono legate dalle tre relazioni

$$\text{(16)}' \qquad 2\gamma_1 \gamma_2 + \mathrm{K}(\alpha^2 + \gamma_2^2) = 0$$

$$\text{(17)}' \qquad \gamma_1^2 = \frac{\lambda - 2\mu \mathrm{L}}{\lambda + 2\mu} \alpha^2$$

$$\text{(15)}' \qquad (\lambda + 2\mu)\,(\alpha - \gamma_1^2) = \mu(\alpha^2 - \gamma_2^2).$$

Dalle ultime due si ricava

$$\text{(18)} \qquad \gamma_2^2 = -(1 + 2\,\mathrm{L})\,\alpha^2$$

e quindi

$$\text{(19)} \qquad \varepsilon^2 = \frac{2\mu}{\varrho}(1 + \mathrm{L})\,\alpha^2.$$

Eliminando $\gamma_1 \; \gamma_2$, si ottiene fra K e L la relazione

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{K}^2 = \frac{(1 + 2\,\mathrm{L})\,(2\mu\mathrm{L} - \lambda)}{(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{L}^2}.$$

Le espressioni di $u_1 w_1$, $u_2 w_2$ date dalle (12) (13), tenuto conto delle (16) (17) e posto $S = 0$ $C = 1$, ci dànno, per le componenti dello spostamento superficiale,

$$(21)\quad \begin{cases} u = (1 + L)\,(a_1 \cos\sigma + c_1 \operatorname{sen}\sigma) = (1 + L)\,A \cos(\sigma - \varphi) \\ w = \left(\dfrac{\gamma_1}{\alpha} + K \dfrac{\alpha}{\gamma_2}\right)(b_1 \operatorname{sen}\sigma - d_1 \cos\sigma) = \left(\dfrac{\gamma_1}{\alpha} + K \dfrac{\alpha}{\gamma_2}\right) B \operatorname{sen}(\sigma - \psi) \end{cases}$$

dove

$$(22)\quad A = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} \quad B = \sqrt{b_1^2 + d_1^2} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{c_1}{a_1} \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{d_1}{b_1} \cdot$$

Per la (16)' è $\gamma_1 \gamma_2 + K\alpha^2 = - \gamma_1 \gamma_2 - K\gamma_2^2$; e, sostituendo a $\gamma_1 \gamma_2 K$ le loro espressioni in L, si ha

$$(23)\qquad w = \sqrt{\frac{\lambda - 2\mu L}{\lambda + 2\mu}}\left(1 + \frac{1}{L}\right) B \operatorname{sen}(\sigma - \psi)\,.$$

L'equazione (18) ci dice che, dovendo essere γ_2 reale, L è negativa e, in valore assoluto, maggiore di $\frac{1}{2}$. Per $L = -1$ è $\varepsilon = 0$ $u = 0$ $w = 0$, cioè la vibrazione nel piano verticale è nulla; la deformazione, se le condizioni profonde permettono in tal caso una v diversa da 0, è solo *trasversale* e fissa. Oltre il valore -1, la ε diventerebbe imaginaria.

La costante L è quindi compresa fra i valori $-\frac{1}{2}$ e -1, inclusivi. Entro questo intervallo può avere infiniti valori: cioè infinite onde superficiali, dotate di velocità di propagazione diversa, sono possibili; le condizioni iniziali e profonde determineranno caso per caso il gruppo di onde che realmente si verificano.

6. Nel caso in cui $\lambda = \mu$ (coefficiente di Poisson $^1/_4$), che si verifica assai approssimativamente per i materiali della crosta terrestre, la relazione (20) fra K e L diventa

$$K^2 = \frac{4L^2 - 1}{3L^2}.$$

Se supponiamo $K = L$, i valori possibili di L sono dati dall'equazione

$$3L^4 - 4L^2 + 1 = 0$$

le cui radici sono $L = \pm 1$ $L = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Escludendo i due valori positivi, pei quali γ_2 sarebbe imaginaria, rimangono i due valori $L = -1$, $L = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$

Al primo valore corrisponde $\varepsilon = 0$, ossia, come si disse, una deformazione stabile del terreno rappresentata da uno spostamento orizzontale del suolo in senso normale all'asse delle x $(u = w = 0)$.

Al secondo valore risponde la velocità di propagazione

$$V = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 0.9194 \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

che è il valore trovato da Rayleigh.

Vediamo dunque che l'onda di Rayleigh non si verifica soltanto nel caso, da lui considerato, di un solido indefinito, ma anche nel caso di una lastra quando $K = L$; cioè, per le (16) (17), quando sia:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}$$

quando cioè sia costante, nella componente della vibrazione (uw) entro il piano verticale, il rapporto fra l'ampiezza delle onde trasversali e quella delle onde longitudinali, e quando perciò le onde stesse siano in fase.

Fisica terrestre. — *I fenomeni eruttivi dello Stromboli nel novembre 1915*. Nota preliminare del prof. Gaetano Platania, presentata dal Socio A. Riccò.

Incaricato dal prof. A. Riccò, direttore del R. Osservatorio geodinamico di Catania, di recarmi allo Stromboli, per studiare la recente fase eruttiva parossismica di quell'interessante vulcano, riassumo le principali osservazioni che potei farvi nella mia visita.

La sera del 12 novembre 1915, l'ing. F. A. Perret ed io dal mare, presso la così detta « Sciara del fuoco », costatammo che dei diversi crateri era veramente attivo soltanto quello più vicino al Faraglione di ponente o *Torrione*, e dava, ad intervalli di circa 15 minuti, magnifiche esplosioni, lanciando in alto con violenza un gran numero di brandelli di fluida lava di colore rosso candente, i quali, ricadendo sui fianchi del monte, non rotolavano giù, ma per la loro grande pastosità vi rimanevano in gran maggioranza appiccicati, e si oscuravano a poco a poco, in modo che per un breve tratto di tempo tutta la collina craterica rimaneva costellata di numerosi punti luminosi.

I fenomeni effusivi invece erano quasi del tutto cessati: a circa 150 metri sotto il cratere attivo, si vedeva rosseggiare vivamente un punto luminoso, cioè la bocca dalla quale fino al giorno avanti aveva continuato a fluire la lava in corrente.