ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1916.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sistemi ortogonali di Guichard-Darboux e loro trasformazioni di Ribaucour.* Nota II [1] del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Proseguendo le ricerche dell'altra mia Nota, nella presente tratto delle *trasformazioni di Ribaucour* per inviluppi di ipersfere dei sistemi n^{pli} ortogonali nello spazio S_n euclideo, con particolare applicazione ai sistemi (E) ed ai sistemi di Guichard-Darboux. Pongo dapprima le formole generali per queste trasformazioni sotto una nuova forma, che corrisponde esattamente (pel caso $n = 2$) a quella data da Eisenhart [2] per le trasformazioni di Ribaucour delle ordinarie superficie, e si presta opportunamente all'attuale ricerca come ad altre analoghe di cui tratterò in seguito.

Sia dato, nello spazio euclideo S_n a n dimensioni, un sistema n^{plo} ortogonale $(u_1, u_2, \dots u_n)$ definito dalla relativa forma del ds^2

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \cdots + H_n^2 du_n^2 .$$

I coefficienti $H_1, H_2, \dots H_n$ e le corrispondenti rotazioni $\beta_{ik} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial u_i}$ sa-

[1] Ved. la Nota I nel fascicolo del 5 marzo 1916.
[2] Cfr. Eisenhart, *Sulle superficie di rotolamento e le trasformazioni di Ribaucour* (in questi Rendiconti, ser. 5ª, vol. 24°, fascicolo ottobre 1915).

ranno legati dal sistema differenziale caratteristico

$$
(\mathrm{A})\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\,\mathrm{H}_k \\[2ex]
\dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\,\beta_{lk} \qquad\qquad (i \neq k \neq l) \\[2ex]
\dfrac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \dfrac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum\limits_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\,\beta_{\lambda k} = 0 \ (^1).
\end{cases}
$$

Scriviamo inoltre le equazioni fondamentali a cui soddisfano le n coordinate cartesiane ortogonali x_r del punto variabile, e corrispondentemente i coseni di direzione

$$
\mathrm{X}_1^{(r)}, \mathrm{X}_2^{(r)}, \ldots \mathrm{X}_n^{(r)}
$$

dell'asse delle x_r rispetto agli n spigoli dell'n^{edro} principale:

$$
(1)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial x_r}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i\,\mathrm{X}_i^{(r)} \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathrm{X}_i^{(r)}}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\mathrm{X}_k^{(r)} \quad , \quad \dfrac{\partial \mathrm{X}_i^{(r)}}{\partial u_i} = -\sum\limits_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\mathrm{X}_\lambda^{(r)}.
\end{cases}
$$

Nel sèguito, per semplicità di scrittura, sarà omesso nelle x_r l'indice r inferiore, e nelle $\mathrm{X}_i^{(r)}$ il superiore r.

2. Le trasformazioni di Ribaucour per inviluppi di ipersfere del sistema ortogonale (Σ) in nuovi sistemi (Σ') si ottengono dapprima nel modo seguente (²):

Prendasi un sistema di n funzioni $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ delle u, soddisfacenti al sistema differenziale

$$
(2)\qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k\,,
$$

che ammette soluzioni dipendenti da n funzioni arbitrarie. Per ogni tale soluzione $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n)$, risulta un differenziale esatto l'espressione $\sum\limits_{\lambda} \mathrm{H}_\lambda\,\gamma_\lambda\,du_\lambda$, e noi calcoliamo, con una quadratura, una corrispondente funzione φ dalle equazioni

$$
(3)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \mathrm{H}_i\,\gamma_i\,.
$$

(¹) È da ricordarsi che, in queste formole, i, k, l sono tre indici *diversi*, presi comunque nella serie $1, 2, \ldots n$; e la segnatura $\sum\limits_{\lambda}^{(i,k)}$ sta a denotare che l'indice variabile percorre la serie $1, 2, 3, \ldots n$. *esclusi gli indici* i, k. Analogo significato per le notazioni $\sum\limits_{\lambda}^{(i)}$, $\sum\limits_{\lambda}^{(i,k,l)}$, ecc.

(²) Cfr. la mia Nota *Sulle trasformazioni di Ribaucour* ecc. (questi Rendiconti, agosto 1915).

Dopo ciò, ne resta individuato un nuovo sistema ortogonale (Σ'), trasformato di Ribaucour del primitivo, che si ottiene in termini finiti dalle formole

$$x' = x - \frac{2\varphi}{\sum\limits_\lambda \gamma_\lambda^2} \cdot \sum \gamma_\lambda X_\lambda\,, \tag{4}$$

dove le x'_r sono le coordinate del punto che descrive il sistema (Σ'). E indicando cogli accenti le quantità relative a (Σ'), pei nuovi coseni di direzione X'_i possiamo prendere i valori

$$X'_i = \frac{2\gamma_i}{\sum\limits_\lambda \gamma_\lambda^2} \cdot \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - X_i\,. \tag{5}$$

Ora vogliamo porre queste formole generali sotto la nuova forma in vista, introducendo in calcolo i nuovi valori H'_i dei coefficienti pel sistema trasformato (Σ').

3. Cominciamo dall' introdurre una nuova funzione ausiliaria ψ con la posizione

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = 2\varphi\psi\,, \tag{6}$$

sicchè le formole (4), (5) si scriveranno ora

$$x' = x - \frac{1}{\psi} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda \tag{4*}$$

$$X'_i = \frac{\gamma_i}{\varphi\psi} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - X_i\,. \tag{5*}$$

Derivando rispetto ad u_i la (6), e la somma $\sum\limits_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda$, col tenere presente le (1), (2), (3), abbiamo

$$\gamma_i \left\{ \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda - H_i \psi \right\} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum_\lambda \lambda_\lambda X_\lambda = \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda \right) \cdot X_i\,. \tag{8}$$

Ed ora la derivazione delle (4*) porge

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \frac{\varphi}{\gamma_i \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \left(\frac{\gamma_i}{\varphi\psi} \sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda - X_i \right),$$

cioè, per le (5*),

$$\frac{\partial x'}{\partial u_i} = \frac{\varphi}{\gamma_i \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \cdot X'_i\,.$$

Risulta di qui confermato che il punto (x'_r) descrive un nuovo sistema n^{plo} ortogonale, e pei valori dei nuovi coefficienti H'_i si ha

$$H'_i = \frac{\varphi}{\gamma_i} \frac{\partial \log \psi}{\partial u_i},$$

onde le (7) si scrivono sotto la forma equivalente

$$(7^*) \qquad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} + \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda = (H_i + H'_i)\, \psi .$$

Confrontando questa con la (2) e costruendo la relativa condizione di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(\beta_{ik}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k}(\beta_{ki}\gamma_k) + \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda = \frac{\partial}{\partial u_k} \{(H_i + H'_i)\,\psi\},$$

coll'aver riguardo alle altre equazioni già scritte, troviamo

$$(9) \qquad \frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} - (H_i + H'_i) \frac{\gamma_k}{\varphi} \right\} \cdot H'_k .$$

Riepilogando, le trasformazioni di Ribaucour vengono così a dipendere dalla ricerca della $2n+2$ funzioni ausiliarie

$$\gamma_i\ ,\ H'_i\ ,\ \varphi, \psi\ ,$$

assoggettate a soddisfare al sistema differenziale

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\gamma_k \ , & \dfrac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = (H_i + H'_i)\,\psi - \sum\limits_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i}\gamma_\lambda \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i \ , & \dfrac{\partial \log \psi}{\partial u_i} = \dfrac{\gamma_i H'_i}{\varphi} \\ \dfrac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} - (H_i + H'_i) \dfrac{\gamma_k}{\varphi} \right\} \cdot H'_k , & \end{array} \right.$$

e inoltre alla equazione in termini finiti

$$(1^*) \qquad \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 = 2\varphi\psi .$$

Questa è la forma cercata delle equazioni di trasformazione, che, nel caso $n=2$, dànno quella già considerata da Eisenhart.

4. È da osservare che, costruendo le condizioni d'integrabilità per il sistema (I), mediante le (A), si ottengono equazioni che rientrano nella (I). Il sistema (I) è adunque completamente integrabile; e poichè, come subito si verifica, esso ammette l'integrale quadratico

$$\sum_\lambda \gamma_\lambda^2 - 2\varphi\psi = \mathrm{cost},$$

basta scegliere i valori iniziali delle γ_i, φ, ψ, in guisa da annullare la costante del secondo membro, ed anche la (I*) resterà soddisfatta. Si osservi ancora che, nel sistema (I), per le γ_i, φ, ψ, tutte le variabili sono principali, mentre per la H'_i la variabile u_i è parametrica e tutte le altre principali. Così, scelto un sistema di valori iniziali per le u_i, diciamo $(0, 0, \ldots 0)$, per definire una soluzione $(\gamma_i, \varphi, \psi, H'_i)$ si potranno dare ad arbitrio, compatibilmente colla (I*), i valori iniziali delle γ_i, φ, ψ quando tutte le variabili si annullano, e per la H'_i si prescriverà *ad arbitrio* la funzione della u_i a cui essa si riduce quando si annullino le rimanenti variabili.

Ogni tale soluzione $(\gamma_i, \varphi, \psi, H'_i)$ individua un nuovo sistema (Σ'), le cui rotazioni β'_{ik} sono date, per le (9), dalle formole

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - (H_k + H'_k)\frac{\gamma_i}{\varphi}. \tag{10}$$

È manifesto geometricamente che la relazione fra $(\Sigma), (\Sigma')$ è invertibile, e può quindi domandarsi quali valori competono nel passaggio inverso, da (Σ') a (Σ), alle nuove funzioni trasformatrici γ_i, φ, ψ, che indicheremo con

$$\gamma'_i \ , \ \varphi' \ , \ \psi' ,$$

e saranno, come è chiaro, determinate solo a meno di un fattore costante. Ora basta scrivere le equazioni stesse (I) per questo passaggio per trovare le formole richieste, che si scrivono

$$\gamma'_i = \mu\gamma_i \quad , \quad \varphi' = -\mu\varphi \quad , \quad \psi' = -\mu\psi , \tag{11}$$

il moltiplicatore μ essendo determinato (a meno di un fattore costante) con una quadratura dalle formole

$$\frac{\partial \log \mu}{\partial u_i} = -\frac{H_i + H'_i}{\varphi}\gamma_i . \tag{11*}$$

5. Cominciamo dall'applicare queste formole generali a quei sistemi ortogonali che, seguendo la denominazione del Darboux, abbiamo nella Nota precedente indicati come *sistemi* (E). Essi sono caratterizzati dalla proprietà che (scegliendo convenientemente i parametri u_i) ha luogo l'eguaglianza

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} , \tag{12}$$

od anche dalla equivalente che ds^2 riveste la forma

$$ds^2 = \frac{\partial \Theta}{\partial u_1} du_1^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u_2} du_2^2 + \cdots + \frac{\partial \Theta}{\partial u_n} du_n^2 .$$

Ora noi domandiamo: *Un sistema* (E) *possiede, fra i suoi trasformati di Ribaucour, dei sistemi* (E') *della medesima specie?*

Bisogna eseminare se, sussistendo le (12), è possibile integrare le (I) e (I*) in guisa che sussistano le analoghe pel sistema trasformato

$$\beta'_{ik} = \beta'_{ki}\,.$$

Per le (10), questo porta alle relazioni

$$(H'_k + H_k)\,\gamma_i = (H'_i + H_i)\,\gamma_k\,,$$

che debbono sussistere per tutte le coppie $(i\,,k)$, onde sarà da porsi

$$\gamma_i = M(H_i + H'_i)\,, \tag{13}$$

essendo M un conveniente moltiplicatore. Derivando questa rapporto ad u_k, coll'osservare le (A), le (I), le (12), e le (13) stesse, troviamo

$$\frac{\partial \log M}{\partial u_k} = \frac{\gamma_k H'_k}{\varphi} = \frac{\partial \log \psi}{\partial u_k}\,,$$

da cui risulta che M non differisce da ψ se non per un fattore costante. Scriviamo dunque

$$\psi = cM \quad (c \text{ costante}),$$

dopo di che le equazioni (I) della prima linea diventano

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik}\,\gamma_k \quad , \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = c\gamma_i - \sum_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i}\,\gamma_\lambda\,, \tag{14}$$

e queste costituiscono, per le γ_i, un sistema lineare omogeneo ai differenziali totali.

6. Si verifica facilmente che questo sistema, a causa delle (I) e delle (12), è completamente integrabile, per qualunque valore della costante c. Verifichiamo che a qualunque sua soluzione corrisponde una trasformazione di Ribaucour del sistema (E) in un nuovo sistema (E'). Per questo si derivi la somma

$$\sum_{\lambda} \gamma_\lambda^2 = 2\varphi\psi\,,$$

il che dà, per le (14),

$$c\gamma_i^2 = \varphi\,\frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \psi\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\,,$$

ossia, per le (I),

$$c\gamma_i = \psi(H_i + H'_i).$$

Di qui risulta

$$H_i + H'_i = \frac{c\gamma_i}{\psi} = \frac{2c\gamma_i\,\varphi}{\sum_{\lambda} \gamma_\lambda^2}\;;$$

indi, per le (10),

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \frac{2c\gamma_i\gamma_k}{\sum_\lambda \gamma_\lambda^2},$$

espressione simmetrica in i, k. Dunque $\beta'_{ik} = \beta'_{ki}$, ed il sistema trasformato è un sistema (E'), come si voleva.

c. d. d.

Concludiamo che *ogni sistema* (E) *dello spazio* S_n *euclideo ammette* ∞^n *sistemi* (E') *della stessa specie trasformati di Ribaucour; questi si ottengono integrando il sistema lineare* (14).

Si può dare una semplice interpretazione geometrica a questo risultato ricorrendo alla composizione delle trasformazioni di Ribaucour mediante quelle di Combescure (trasformazioni parallele) e le inversioni per raggi vettori reciproci (cfr. Nota citata al n. 2). Soddisfacendo le γ_i alle (14), le formole

$$\xi = \gamma_i X_1 + \gamma_2 X_2 + \cdots + \gamma_n X_n$$

definiscono un sistema (E) parallelo al sistema (E), pel quale le γ_i coincidono colle distanze W_i dell'origine dalle facce dell' n^{edro} principale. E poichè, derivando le precedenti, dalle (8) e dalle (14) si ha

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = c\gamma_i X_i,$$

si vede che, per questi particolari sistemi (E), si ha ad un tempo

$$W_i = \gamma_i \quad , \quad H_i = c\gamma_i,$$

e le ipersuperficie in ciascuna delle n famiglie sono omotetiche rispetto all'origine [1]. Dalle inversioni per raggi vettori reciproci rispetto all'origine questi particolari sistemi (E) sono cangiati in sistemi della stessa specie, e le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi (E) generali si ottengono da queste particolari con una trasformazione parallela.

Dimostrerò, in una prossima Nota che *esistono trasformazioni perfettamente analoghe pei sistemi* (E) *negli spazii generali a curvatura costante*, dove per altro la decomposizione così semplice, sopra effettuata pel caso euclideo, più non ha luogo.

La seconda classe di sistemi ortogonali a cui vogliamo applicare le trasformazioni di Ribaucour sarà quella dei *sistemi Guichard-Darboux*. Ma qui amplieremo alquanto (dal punto di vista reale) la definizione di questi sistemi data nella Nota I, indicando con questo nome tutti i sistemi ortogo-

[1] Cfr. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux* (2ème édition), n. 244.

nali pei quali, fra i coefficienti H_i^2 del ds^2, sussiste una relazione della forma

$$c_1 H_1^2 + c_2 H_2^2 + \cdots + c_n H_n^2 = \text{cost}\,,$$

essendo le c_i n costanti *tutte diverse da zero* (¹).

Siccome, alterando ciascun parametro u_i di un fattore costante, si può rendere $c_i = \pm 1$, potremo prendere, senza alterare la generalità, la detta relazione sotto la forma

$$\varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 = c \text{ (costante)} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1)\,. \tag{15}$$

Con questa definizione ampliata si modificano le equazioni calcolate nella Nota I, come segue:

La (15), derivando rapporto ad u_i, dà

$$\varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = - \sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda\,,$$

e, paragonando questa coll'altra,

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k\,,$$

si trova, per la relativa condizione d'integrabilità,

$$\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0\,.$$

Si vede, quindi, che *nei sistemi di Guichard-Darboux, corrispondenti alla* (5), *le rotazioni* β_{ik} *debbono soddisfare al sistema differenziale*

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \\ &\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} = 0 \\ &\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_\lambda^{(i,k)} \beta_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0\,, \end{aligned} \right.$$

(¹) Esistono, del resto, anche sistemi ortogonali, corrispondenti alla relazione scritta, nella quale una o più delle costanti c_i si annullino. Ma questi sistemi formano, rispetto ai sistemi di Guichard-Darboux, delle classi *singolari*, che richiedono uno studio separato. Per es., nel caso $n = 3$, se si annulla una delle costanti c_i, i sistemi tripli ortogonali corrispondenti sono quelli che contengono *una* serie di superficie a curvatura costante.

e i coefficienti H_i *all'altro*

$$(B^*) \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \quad , \quad \varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda \, ,$$

Il sistema (B) è completamente integrabile, e la sua soluzione generale dipende da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie (cfr. Nota I). Successivamente le (B*) formano per le H_i un sistema completamente integrabile di equazioni ai differenziali totali, che possiede inoltre l'integrale quadratico (15).

8. Partendo ora da un tale sistema (Σ) di Guichard-Darboux, supposto noto, cerchiamo se fra i suoi sistemi trasformati di Ribaucour ne esistono di quelli (Σ') della stessa specie ed in guisa che i nuovi coefficienti H'_i soddisfino alla equazione stessa (15)

$$\varepsilon_1 H_1'^2 + \varepsilon_2 H_2'^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n'^2 = c \ ^{(1)}.$$

Da questa relazione segue, come sopra,

$$\varepsilon_i \frac{\partial H'_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta'_{i\lambda} H'_\lambda \, ,$$

ovvero

$$(16) \qquad \varepsilon_i \frac{\partial H'_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \left\{ \beta_{i\lambda} - (H_\lambda + H'_\lambda) \frac{\gamma_i}{\varphi} \right\} . \, H'_\lambda \, ,$$

equazioni che dobbiamo aggiungere alle (I), (I*) per esaminarne la compatibilità, insieme con la equazione in termini finiti

$$(16') \qquad \sum_\lambda \varepsilon_\lambda H_\lambda'^2 = c \, .$$

Tenendo conto delle verifiche già effettuate, resta solo da paragonare le (16') colle equazioni dell'ultima linea in (I), cioè le equazioni seguenti:

$$\frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \beta'_{ki} H'_k \quad , \quad \varepsilon_i \frac{\partial H'_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta'_{i\lambda} H'_\lambda \, ,$$

dove per le β'_{ik} s'intendono i valori (10). Dobbiamo dunque esaminare le corrispondenti condizioni d'integrabilità

$$\Omega = \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta'_{ki} H'_k) + \varepsilon_k \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta'_{ik} H'_k) + \sum_\lambda^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \frac{\partial}{\partial u_k} (\beta'_{i\lambda} H'_\lambda) = 0 \, .$$

9. Decomponiamo il primo membro Ω di questa espressione in due parti, secondo la formola

$$\Omega = \Omega' + H'_k \Omega'' \, ,$$

(1) Che la costante c debba rimanere la stessa, risulta dai calcoli seguenti nel testo.

avendo posto

$$\left\{\begin{aligned} \Omega' &= \varepsilon_i\, \beta'_{ki} \frac{\partial H'_k}{\partial u_i} + \varepsilon_k\, \beta'_{ik} \frac{\partial H'_k}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \frac{\partial \beta'_{i\lambda}}{\partial u_k} H'_\lambda \\ \Omega'' &= \varepsilon_i \frac{\partial \beta'_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta'_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda\, \beta'_{i\lambda}\, \beta'_{k\lambda}\,, \end{aligned}\right.$$

e dimostriamo separatamente che si ha

$$a)\quad \Omega' = 0 \quad , \quad b)\quad \Omega'' = 0\,.$$

a) In forza delle equazioni stesse del sistema e dell'altra

$$\frac{\partial \beta'_{i\lambda}}{\partial u_k} = \beta'_{ik}\, \beta'_{k\lambda} \qquad (i \neq k \neq \lambda)\,,$$

si ha

$$\Omega' = \varepsilon_i\, \beta'_{ki}\, \beta'_{ik}\, H'_i - \beta'_{ik} \sum_{\lambda}^{(k)} \varepsilon_\lambda\, \beta'_{k\lambda}\, H'_\lambda + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda\, \beta'_{ik}\, \beta'_{k\lambda}\,,$$

ed il secondo membro è identicamente nullo.

b) Sostituendo per le β'_{ik} i valori (10), si ha

$$\Omega'' = \varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} - \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left\{(H_i + H'_i)\frac{\gamma_k}{\varphi}\right\} - \varepsilon_k \frac{\partial}{\partial u_k}\left\{(H_k + H'_k)\frac{\gamma_i}{\varphi}\right\} +$$
$$+ \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \left\{\beta_{i\lambda} - (H_\lambda + H'_\lambda)\frac{\gamma_i}{\varphi}\right\} \left\{\beta_{k\lambda} - (H_\lambda + H'_\lambda)\frac{\gamma_k}{\varphi}\right\}.$$

Se si eseguiscono le derivazioni, utilizzando le formole precedenti. si trova, dopo semplici riduzioni,

$$\Omega'' = \frac{\gamma_i\,\gamma_k}{\varphi^2}\left(\sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda\, H_\lambda^2 - \sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda\, H'^2_\lambda\right),$$

onde, per l'annullarsi di Ω'', si richiede e basta che la somma $\sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda\, H'^2_\lambda$ abbia lo stesso valore costante c come la $\sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda\, H^2_\lambda$. Concludiamo che il nostro sistema (misto) ai differenziali totali è completamente integrabile, ed il suo integrale generale contiene $2n - 1$ costanti, onde il risultato:

Ogni sistema di Guichard Darboux nell' S_n *euclideo ammette* ∞^{2n-1} *sistemi della medesima specie derivati per trasformazione di Ribaucour.*

Nel caso attuale il sistema ai differenziali totali da cui dipende la ricerca dei sistemi trasformati non ha più la forma così semplice (lineare) come nel caso dei sistemi (E). Per altro il processo d'integrazione successiva potrebbe semplificarsi facendo uso di un *teorema di permutabilità* che non è difficile a stabilire.

Osserverò. da ultimo, che anche pei sistemi di Guichard-Darboux *negli spazii a curvatura costante* esistono le trasformazioni di Ribacour.