ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Meccanica. — *Sull'influenza della rotazione terrestre nella caduta dei gravi.* Nota del Corrisp. E. ALMANSI.

1. La determinazione sperimentale della deviazione rispetto alla verticale, a cui dà luogo, nella caduta dei gravi, la rotazione della Terra, non può essere eseguita con sufficiente precisione finchè si considera un grave che cade liberamente. Risultati di gran lunga più esatti si ottengono ricorrendo ad un apparecchio atto ad aumentare la durata della caduta, e che è in sostanza una macchina di Atwood.

Si presenta pertanto il problema di determinare, in questo caso, la deviazione teorica, per poterla confrontare con quella che risulterà dalle esperienze.

Sia O il punto dal quale incomincia la caduta del grave. Riferiamoci ad un sistema di assi con l'origine in O. L'asse Oz sia verticale e rivolto verso il basso, l'asse Oy rivolto verso Est, l'asse Ox verso Sud.

Il filo, a cui è collegato il punto pesante P del quale si esamina la caduta, passa costantemente per O. Noi vogliamo considerare il movimento del punto P sino al suo incontro con un piano orizzontale che dista di h dal piano xy.

Il punto P si muove rispetto al sistema $O(x, y, z)$ come se questo fosse immobile, e il punto fosse libero, e sollecitato da una forza risultante:

1°) del suo peso, di proiezioni

$$mg_x \quad , \quad mg_y \quad , \quad mg_z \, ,$$

m essendo la massa del punto, g_x, g_y, g_z le proiezioni della gravità (che alla sua volta risulta dell'attrazione terrestre e della forza centrifuga);

2°) della tensione τ esercitata dal filo, le cui proiezioni denoteremo con

$$\tau_x \quad , \quad \tau_y \quad , \quad \tau_z \, ;$$

3°) della forza centrifuga composta, che sugli assi $O(x, y, z)$, detta ω la velocità angolare di rotazione della Terra, φ la latitudine geografica del luogo, ha le proiezioni

$$m \, . \, 2\omega \operatorname{sen} \varphi \frac{dy}{dt} \, ,$$

$$-m \, . \, 2\omega \left(\operatorname{sen} \varphi \frac{dx}{dt} - \cos \varphi \frac{dz}{dt} \right) ,$$

$$m \, . \, 2\omega \cos \varphi \frac{dy}{dt} \, ,$$

ove x, y, z denotano le coordinate del punto P. Le equazioni del movimento di P saranno per conseguenza

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= g_x + \frac{\tau_x}{m} + 2\omega \operatorname{sen}\varphi \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= g_y + \frac{\tau_y}{m} - 2\omega\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{dx}{dt} - \cos\varphi \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g_z + \frac{\tau_z}{m} + 2\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Noi semplifichiamo queste equazioni considerando, in primo luogo, come costante la gravità in tutti i punti della traiettoria di P. Se dunque g è la sua grandezza nel punto O, riterremo, per ogni valore di t,

$$g_x = 0 \quad , \quad g_y = 0 \quad , \quad g_z = g.$$

In secondo luogo, trascuriamo quei termini i quali, considerando ω come un infinitesimo, sono infinitesimi d'ordine superiore; quindi, a causa dei fattori $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, che si annullano con ω, i termini che contengono il fattore $\omega \frac{dx}{dt}$, o $\omega \frac{dy}{dt}$.

E finalmente supponiamo che il tratto OP di filo sia costantemente rettilineo. Se l è la sua lunghezza al tempo t, sarà allora

$$\tau_x = -\frac{x}{l}\tau \quad , \quad \tau_y = -\frac{y}{l}\tau \quad , \quad \tau_z = -\frac{z}{l}\tau.$$

Otterremo così le equazioni

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -x\frac{\tau}{lm} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -y\frac{\tau}{lm} + 2\omega\cos\varphi\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - z\frac{\tau}{lm} \text{ (1)}. \end{aligned}\right.$$

(1) Rispetto al conservarsi rettilineo del tratto di filo OP, si potrebbe dimostrare, tenendo conto della sua flessibilità, che questo avviene soltanto quando il peso cade con accelerazione costante. Devesi per altro notare che nella pratica si è sempre ben lontani da quella perfetta flessibilità che presuppone la dinamica dei fili. Calcoli da me eseguiti porterebbero a concludere che l'ipotesi di una perfetta flessibilità (probabilmente anche a causa di uno speciale trattamento al quale il filo era stato assoggettato nelle esperienze a cui mi sono riferito) conduce a risultati meno esatti di quelli a cui si arriva supponendo il filo rettilineo.

Dovranno poi essere verificate le condizioni relative all'istante iniziale $t = 0$:

(2)
$$x = y = z = 0 \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 .$$

La prima delle equazioni (1), eliminando $\frac{\tau}{lm}$ per mezzo della terza, potrà scriversi:

(3)
$$z \frac{d^2x}{dt^2} = -x\left(g - \frac{d^2z}{dt^2}\right);$$

e la seconda

$$z \frac{d^2y}{dt^2} = -y\left(g - \frac{d^2z}{dt^2}\right) + 2\omega \cos\varphi\, z \frac{dz}{dt} .$$

Conviene porre

(4)
$$y = \omega \cos\varphi \, . \, u ,$$

ove u sarà, come y, una funzione del tempo. Sostituendo nella equazione precedente, e togliendo il fattore comune $\omega \cos \varphi$, avremo

$$z \frac{d^2u}{dt^2} + \left(g - \frac{d^2z}{dt^2}\right) u - 2z \frac{dz}{dt} = 0 ,$$

ossia

(5)
$$z \frac{d^2u}{dt^2} - u \frac{d^2z}{dt^2} + gu - 2z \frac{dz}{dt} = 0 .$$

Nell'istante iniziale dovrà inoltre aversi

(6)
$$u = 0 \quad , \quad \frac{du}{dt} = 0 .$$

Osserviamo che, se si aggiunge a z un termine infinitesimo, possiamo ritenere che anche u varierà di una quantità infinitesima, quindi y di una quantità trascurabile. Segue da ciò che nella equazione (5) si potrà considerare z come il valore che avrebbe, al tempo t, la coordinata z di P, *se la Terra non rotasse.* La natura di questa funzione $z(t)$ dipenderà dal modo come l'apparecchio è costituito in tutti i suoi particolari. Noi la supponiamo nota. L'equazione (5), insieme colle condizioni iniziali (6), determina allora la funzione u (che è dunque indipendente dalla velocità di rotazione ω e dalla latitudine φ). La formula (4) ci darà poi la deviazione orientale y.

Quanto alla deviazione meridionale, osserviamo che tutte le condizioni relative ad x, ossia l'equazione (3) e le condizioni iniziali $x=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, sono verificate se si suppone che sia costantemente $x=0$. Nel nostro grado d'approssimazione, la deviaziono meridionale è dunque da ritenersi nulla.

2. Se il grave cade con accelerazione costante a, ed è perciò

$$z=\tfrac{1}{2}\,at^2\,,$$

si ha

$$u=\mathrm{A}\,t^3\,, \tag{7}$$

ove A è una costante. Le condizioni (6), per $t=0$, sono infatti verificate; ed è pure verificata l'equazione (5) se si pone

$$\mathrm{A}=\frac{a^2}{g+2a}\,.$$

Sarà dunque in tal caso

$$y=\frac{a^2}{g+2a}\,\omega\cos\varphi\,t^3\,;$$

e per $t=\mathrm{T}$, indicando con T la durata della caduta,

$$y=\frac{a^2}{g+2a}\,\omega\cos\varphi\,\mathrm{T}^3\,;$$

formula dovuta a J. Hagen [1].

Un'osservazione si può fare su questa formula. Essendo $\mathrm{T}=\sqrt{\frac{2h}{a}}$, avremo pure

$$y=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{g+2a}\,(2h)^{\frac{3}{2}}\,\omega\cos\varphi\,.$$

Se si esamina come varia la deviazione y quando l'accelerazione a varia da 0 a g, rimanendo h costante, si riconosce che y non è massima per $a=g$ (ossia quando il grave è libero), ma per $a=\frac{1}{2}\,g$.

3. La formula di Hagen si riferisce ad una legge di caduta molto particolare. Ora, in generale, l'apparecchio usato nelle esperienze non sarà costituito in maniera che il grave cada con accelerazione costante. Per una prima approssimazione si potrà sempre far uso della formula di Hagen, considerando a come un'accelerazione media definita dalla relazione $h=\frac{1}{2}\,a\,\mathrm{T}^2$.

[1] *La rotation de la Terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles.* Appendice 2ª, pag. 43 (Tip. Vaticana, 1912).

Ma volendo calcolare con maggiore esattezza la deviazione, converrà seguire questo procedimento:

Ammetteremo che almeno in quei casi in cui l'accelerazione del grave va regolarmente crescendo o decrescendo, senza subire, durante la caduta, una variazione troppo grande, la funzione u possa rappresentarsi con sufficiente approssimazione aggiungendo alla formula (7) un termine di correzione; precisamente ponendo

$$u = At^3 + Bt^5, \tag{8}$$

ove A e B siano due costanti.

La costante A possiamo determinarla nel modo seguente: Dividiamo per t^3 l'equazione (5). Avremo

$$\frac{z}{t^2} \cdot \frac{1}{t} \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} \frac{u}{t^3} + g \frac{u}{t^3} - \frac{2z}{t^2} \cdot \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} = 0.$$

Facciamo tendere t a zero, e diciamo a l'accelerazione *iniziale* del grave: $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{1}{t}\frac{dz}{dt}$ e $\frac{2z}{t^2}$ tendono ad a, mentre $\frac{u}{t^3}$ e $\frac{1}{t}\frac{d^2u}{dt^2}$, per la formula (8), tendono rispottivamente ad A e 6A. Onde otterremo la relazione

$$3aA - aA + gA - a^2 = 0,$$

dalla quale si deduce, come nel caso che l'accelerazione conservi sempre il valore a,

$$A = \frac{a^2}{g + 2a}. \tag{9}$$

Chiamando poi U il valore che assume u al tempo T, ossia alla fine della caduta. potremo, nella formula (8), far comparire la costante, per ora incognita, U, invece della B. Sarà, per la stessa formula (8),

$$U = AT^3 + BT^5,$$

da cui

$$B = \frac{1}{T^2}\left(\frac{U}{T^3} - A\right);$$

e perciò

$$u = At^3 + \left(\frac{U}{T^3} - A\right)\frac{t^5}{T^2}. \tag{10}$$

Ora riprendiamo l'equazione (5), che scriveremo

$$\frac{d}{dt}\left(z\frac{du}{dt} - u\frac{dz}{dt}\right) + gu - \frac{dz^2}{dt} = 0.$$

Integrando fra 0 e t, abbiamo

$$z\frac{du}{dt} - u\frac{dz}{dt} + gu_1 - z^2 = 0,$$

ove

$$u_1 = \int_0^t u dt;$$

e dividendo per z^2:

$$\frac{d\frac{u}{z}}{dt} + g\frac{u_1}{z^2} - 1 = 0;$$

quindi, integrando fra 0 e T (con l'osservare che $\frac{u}{z}$, ossia $\frac{u}{t^2} : \frac{z}{t^2}$, supposto a diverso da zero, si annulla per $t = 0$),

$$\frac{\mathrm{U}}{h} + g\int_0^{\mathrm{T}} \frac{u_1}{z^2} dt - \mathrm{T} = 0. \tag{11}$$

Ma dalla formula (10) si ha

$$u_1 = \int_0^t u dt = \mathrm{A}\frac{t^4}{4} + \left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{T}^3} - \mathrm{A}\right)\frac{t^6}{6\,\mathrm{T}^2};$$

e perciò

$$\int_0^{\mathrm{T}} \frac{u_1}{z^2} dt = \mathrm{A}p + \left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{T}^3} - \mathrm{A}\right) q,$$

dove

$$p = \frac{1}{4}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{t^4}{z^2} dt \quad , \quad q = \frac{1}{6\,\mathrm{T}^2}\int_0^{\mathrm{T}} \frac{t^6}{z^2} dt. \tag{12}$$

Onde, sostituendo nella (11), otterremo l'equazione

$$\frac{\mathrm{U}}{h} + g\left\{\mathrm{A}p - \left(\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{T}^3} - \mathrm{A}\right) q\right\} - \mathrm{T} = 0,$$

che, risoluta rispetto ad U, ci dà

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{T} - g\,\mathrm{A}(p - q)}{\frac{1}{h} + \frac{gq}{\mathrm{T}^3}}. \tag{13}$$

La deviazione del grave al tempo T sarà

$$y = \mathrm{U}\,\omega \cos \varphi . \tag{14}$$

4. L'espressione di U contiene le due quantità p, q, date dalle formule (12). I loro valori dipendono da T, e dalla natura della funzione $z(t)$, ossia dalla legge secondo la quale avviene la caduta del grave. Nella pratica sarà in generale ben difficile determinare esattamente questa legge. Allo scopo di rendere agevole il calcolo di p e q, osservando che nel caso di un'accelerazione costante a si ha

$$z^2 = \frac{1}{4} a^2 t^4 ,$$

io ammetterò che la legge di caduta del grave possa esprimersi, con sufficiente approssimazione, mediante la formula

$$z^2 = \frac{1}{4} \frac{a^2 t^4}{1 + bt^2} , \tag{15}$$

ove a e b sono due costanti; la prima delle quali si riconosce facilmente che rappresenta il valore di $\frac{d^2 z}{dt^2}$ per $t = 0$, ossia l'accelerazione iniziale. Determineremo l'altra costante facendo, nella equazione (15), $t = \mathrm{T}$, $z = h$. Avremo così, risolvendo l'equazione rispetto a $b\mathrm{T}^2$,

$$b\mathrm{T}^2 = \frac{a^2\,\mathrm{T}^4}{4h^2} - 1 .$$

Introduciamo la quantità

$$\mathrm{H} = \tfrac{1}{2}\, a\, \mathrm{T}^2 . \tag{16}$$

La formula precedente darà

$$b\mathrm{T}^2 = \left(\frac{\mathrm{H}}{h}\right)^2 - 1 . \tag{17}$$

Dalla equazione (15) si ha

$$\frac{t^4}{z^2} = \frac{4}{a^2}(1 + bt^2) \quad , \quad \frac{t^6}{z^2} = \frac{4}{a^2}(t^2 + bt^4) .$$

Onde le formule (12) diverranno

$$p = \frac{1}{a^2} \int_0^{\mathrm{T}} (1 + bt^2)\, dt \quad , \quad q = \frac{2}{3a^2\,\mathrm{T}^2} \int_0^{\mathrm{T}} (t^2 + bt^4)\, dt ;$$

ed eseguendo le integrazioni,

$$p=\frac{T}{a^2}\left(1+\frac{1}{3}b\,T^2\right)\quad,\quad q=\frac{T}{a^2}\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{15}b\,T^2\right);$$

quindi, sostituendo a $b\,T^2$ la sua espressione data dalla (17),

$$p=\frac{T}{a^2}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}\quad,\quad q=\frac{T}{a^2}\left\{\frac{4}{45}+\frac{2}{15}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}.$$

Sarà poi

$$p-q=\frac{T}{a^2}\left\{\frac{26}{45}+\frac{1}{5}\left(\frac{H}{h}\right)^2\right\}.$$

Introdurremo le nuove costanti

$$\beta=\frac{26}{45}+\frac{1}{5}\left(\frac{H}{h}\right)^2\quad,\quad\gamma=\frac{4}{45}+\frac{2}{15}\left(\frac{H}{h}\right)^2,\tag{18}$$

ed avremo:

$$p-q=\beta\,\frac{T}{a^2}\quad,\quad q=\gamma\,\frac{T}{a^2}.$$

La formula (13), sostituendo a $p-q$ e q questi loro valori, diverrà

$$U=\frac{T-\beta\,\dfrac{g\,A\,T}{a^2}}{\dfrac{1}{h}+\gamma\,\dfrac{g}{a^2\,T^2}},$$

ovvero

$$U=\frac{1-\beta\,\dfrac{g\,A}{a^2}}{\dfrac{H}{h}+\gamma\,\dfrac{gH}{a^2\,T^2}}\,H\,T.\tag{19}$$

Ora dalla formula (9) si ha

$$\frac{g\,A}{a^2}=\frac{g}{g+2a}=\frac{1}{1+\alpha},$$

ove

$$\alpha=\frac{2a}{g};\tag{20}$$

e dalla (16)

$$\frac{gH}{a^2T^2} = \frac{g}{2a} = \frac{1}{\alpha}.$$

Onde la formula (19) assumerà la forma

$$U = \frac{1 - \frac{\beta}{1+\alpha}}{\frac{H}{h} + \frac{\gamma}{\alpha}} HT.$$

Ponendo

$$c = \frac{1 - \frac{\beta}{1+\alpha}}{\frac{H}{h} + \frac{\gamma}{\alpha}}, \tag{21}$$

avremo

$$U = cHT.$$

E la formula (14) darà

$$y = cHT\omega\cos\varphi. \tag{22}$$

Una determinazione approssimata della deviazione y può dunque farsi nel modo seguente:

Noi supponiamo di conoscere l'altezza h *e la durata* T *della caduta, e inoltre il valore iniziale* a *della accelerazione del grave, Con questi dati, valendoci delle formule* (16), (20) e (18), *dobbiamo calcolare l'altezza* H, *e le costanti* α, β, γ. *La formula* (21) *ci darà allora il coefficiente* c, *e la* (22) *la deviazione orientale alla fine della caduta.*

Si può verificare che, nel caso di un'accelerazione costante ($H = h$), si ritrova la formula di Hagen.

5. Il prof. G. Gianfranceschi ha eseguite nel 1913, presso l'Istituto Massimo di Roma, esperienze di grande precisione, per determinare la deviazione nella caduta di un grave facente parte di una macchina di Atwood [1]. In queste esperienze si aveva

$$h = \text{m. } 30{,}39 \quad , \quad T = \text{s. } 8{,}35.$$

Volendo calcolare, col metodo qui esposto, il valore teorico della deviazione orientale, mi occorreva conoscere ancora l'accelerazione iniziale a. Ho perciò tenuto conto del modo come era costituito l'apparecchio adoperato

[1] G. Gianfranceschi, *La deviazione dei gravi in caduta*, N. Cimento, ottobre 1913.

nelle esperienze. Il rapporto $\alpha = \frac{2a}{g}$ risulta, in questo caso, espresso dalla formula

$$\alpha = 2\frac{p_1 - p_2 - p_3}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4},$$

ove p_1 rappresenta il peso del grave di cui si esamina la caduta, p_2 quello del contrappeso, p_3 il peso di un filo di lunghezza h avente, per unità di lunghezza, un peso uguale a quello del filo che collega i due corpi suddetti; p_4 è il peso di una puleggia ideale in cui la massa sia tutta distribuita sulla circonferenza su cui si avvolge il filo, e che abbia, rispetto all'asse intorno a cui ruota, lo stesso momento d'inerzia della puleggia reale (nel quale momento d'inerzia ho incluso anche quello del tratto di filo che si avvolge sulla puleggia). Il peso p_4 è risultato uguale a $^4/_9$ del peso reale della puleggia. Ho così trovato

$$\alpha = 0{,}2186 \quad , \quad a = 1{,}071 .$$

Qui occorre notare che la determinazione teorica di a dovrebbe possibilmente evitarsi. Per determinare le due costanti a, b della formula (15), sarebbe preferibile misurare, oltre al tempo T che il grave impiega a compiere l'intera caduta h, il tempo T_0 che esso impiega a percorrerne una parte h_0. Si avrebbero così due equazioni che darebbero, con maggiore esattezza, i valori delle due costanti.

Dalla formula (16) si ha

$$H = 37{,}34 .$$

È perciò

$$\frac{H}{h} = 1{,}229 ;$$

onde le formule (18) daranno

$$\beta = 0{,}8798 \quad , \quad \gamma = 0{,}2902 ;$$

e la (21)

$$c = 0{,}1087 .$$

Si ha poi

$$\omega = 0{,}0000729 \quad , \quad \varphi = 41^\circ.54' \quad , \quad \cos\varphi = 0{,}7443 .$$

Quindi dalla formula (22) avremo

$$y = \text{mm. } 1{,}839 .$$

Le esperienze avevano dato

$$y = \text{mm. } 1{,}865 ,$$

con un errore probabile di 0,014. Ad un errore dello stesso ordine di grandezza può dar luogo il procedimento seguìto per la determinazione teorica di y. Nei limiti di approssimazione, in cui ci siamo trovati, sembra dunque che l'accordo fra il risultato teorico e il risultato sperimentale possa ritenersi conseguito.

Meccanica. — *La risoluzione meccanica esatta delle equazioni differenziali lineari generali di 2° ordine.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

In un volume [1] da me recentemente pubblicato, facendo vedere in quanti svariati modi si possano mutare i dispositivi degli apparecchi integratori in maniera da ottenere la risoluzione delle più diverse equazioni differenziali, ho dato un contributo allo studio di quel campo che ho chiamato *della rappresentazione cinematica dei problemi analitici*, campo che è ben degno di essere coltivato e mietuto, potendo esso in molti casi irraggiare sui problemi dell'analisi una luce nuova, nello stesso modo col quale agiscono sulle ricerche analitiche le concezioni e le rappresentazioni della geometria.

Continuando in quest'ordine di idee, mi propongo oggi di far vedere con quale procedimento cinematico può rappresentarsi l'operazione che corrisponde all'integrazione di un'equazione differenziale lineare generale di 2° ordine a coefficienti *variabili*, mentre che nel volume suddetto io mi era limitato alle equazioni differenziali lineari di 1° ordine a coefficienti generali e a quelle di ordine superiore, ma a coefficienti costanti.

Si vede subito che la quistione si riduce a risolvere un sistema di due equazioni simultanee, di cui una finita, e l'altra differenziale di 1° ordine; e quindi si ha da immaginare degli apparecchi del genere degli integrafi cartesiani, ma in cui vi sieno più carrelli differenziali ed integrali, a movimenti indipendenti, come già si aveva in qualcuno degli apparecchi da me precedentemente fatti conoscere.

Non è inutile di ricordare infine la importanza che può trovare, specialmente per le applicazioni in elettrotecnica, la risoluzione dell'equazione differenziale lineare generale di 2° ordine.

[1] *I miei integrafi per equazioni differenziali*, Napoli, Pellerano, 1914. Questo volume riproduce una Memoria inserita negli Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli (ser. 2ª), vol. 15°, 1913.