ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Le esperienze avevano dato

$$y = \text{mm. } 1{,}865 \,,$$

con un errore probabile di 0,014. Ad un errore dello stesso ordine di grandezza può dar luogo il procedimento seguìto per la determinazione teorica di y. Nei limiti di approssimazione, in cui ci siamo trovati, sembra dunque che l'accordo fra il risultato teorico e il risultato sperimentale possa ritenersi conseguito.

Meccanica. — *La risoluzione meccanica esatta delle equazioni differenziali lineari generali di 2° ordine.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

In un volume [1] da me recentemente pubblicato, facendo vedere in quanti svariati modi si possano mutare i dispositivi degli apparecchi integratori in maniera da ottenere la risoluzione delle più diverse equazioni differenziali, ho dato un contributo allo studio di quel campo che ho chiamato *della rappresentazione cinematica dei problemi analitici*, campo che è ben degno di essere coltivato e mietuto, potendo esso in molti casi irraggiare sui problemi dell'analisi una luce nuova, nello stesso modo col quale agiscono sulle ricerche analitiche le concezioni e le rappresentazioni della geometria.

Continuando in quest'ordine di idee, mi propongo oggi di far vedere con quale procedimento cinematico può rappresentarsi l'operazione che corrisponde all'integrazione di un'equazione differenziale lineare generale di 2° ordine a coefficienti *variabili*, mentre che nel volume suddetto io mi era limitato alle equazioni differenziali lineari di 1° ordine a coefficienti generali e a quelle di ordine superiore, ma a coefficienti costanti.

Si vede subito che la quistione si riduce a risolvere un sistema di due equazioni simultanee, di cui una finita, e l'altra differenziale di 1° ordine; e quindi si ha da immaginare degli apparecchi del genere degli integrafi cartesiani, ma in cui vi sieno più carrelli differenziali ed integrali, a movimenti indipendenti, come già si aveva in qualcuno degli apparecchi da me precedentemente fatti conoscere.

Non è inutile di ricordare infine la importanza che può trovare, specialmente per le applicazioni in elettrotecnica, la risoluzione dell'equazione differenziale lineare generale di 2° ordine.

(1) *I miei integrafi per equazioni differenziali*, Napoli, Pellerano, 1914. Questo volume riproduce una Memoria inserita negli Atti della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli (ser. 2ª), vol. 15°, 1913.

1. Sia data l'equazione generale differenziale lineare di 2° ordine

$$z'' = \Phi(x)\, z' + \varphi'(x)\, z + \psi(x)\,, \tag{1}$$

dove $\Phi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ sieno delle assegnate funzioni di x, rappresentabili mediante curve.

Poniamo

$$\left\{ \begin{aligned} y' &= \mathrm{F}(x)\, y + \psi(x) \\ z' &= f(x)\, z + y\,, \end{aligned} \right. \tag{2}$$

e proponiamoci di ricercare le due funzioni incognite F e f in modo che, eliminando y fra le (2), si abbia la (1). Dalle (2) si ha subito

$$z'' = (f + \mathrm{F})\, z' + (f' - f\mathrm{F})\, z + \psi(x)\,, \tag{3}$$

e bisogna quindi soddisfare le due equazioni simultanee

$$\left\{ \begin{aligned} f + \mathrm{F} &= \Phi \\ f' &= \mathrm{F} f + \varphi' \end{aligned} \right. \tag{4}$$

le quali devono determinare le f e F.

2. Nel § 17 del succitato mio volume ho descritto un integrafo per la risoluzione dell'equazione *generale* lineare

$$f_1' = \mathrm{F}_1(x) \cdot f_1 + \varphi_1'(x)\,, \tag{5}$$

quando naturalmente sieno assegnate le curve F_1 e φ_1'; e lo schema di tale apparecchio è quello rappresentato dalla fig. 1. Facendo scorrere i due carrelli, indicati nella figura colle lettere F e φ, sulle curve di ordinate $-\mathrm{F}_1$ (curva simmetrica, rispetto all'asse x, della curva di ordinate F_1) e φ_1 (integrale di φ_1'), il carrello H descriverà la curva di ordinate $f_1 - \varphi_1$, mentre la punta f descriverà esattamente la curva di ordinate f_1, soluzione di (5). La direzione della tangente a questa curva (direzione della rotella integratrice) è quella indicata dalla freccia passante per H, che è parallela alla retta Ef. La matita scrivente, invece di essere collegata col carrello integrale, è collegata col punto f.

Si tratta ora di applicare questo stesso apparecchio, con qualche aggiunta in maniera da risolvere le due equazioni simultanee (4), cioè di risolvere un'equazione come la (5) (la seconda delle (4)), ma in cui il coefficiente F non sia dato, e sia invece legato ad f dalla relazione finita $f + \mathrm{F} = \Phi$.

A ciò fare, si può procedere in un modo molto semplice, come segue:

Osservando che, per la disposizione della figura (avendo cioè messo il carrello F al disotto piuttosto che al disopra dell'asse delle x, in maniera che la curva descritta da F non è quella assegnata, ma la sua simmetrica) la quantità $f + F$ è rappresentata dalla distanza fra i due punti f e F, basterà far sì che questa distanza si conservi costantemente eguale all'ordinata di una curva Φ assegnata.

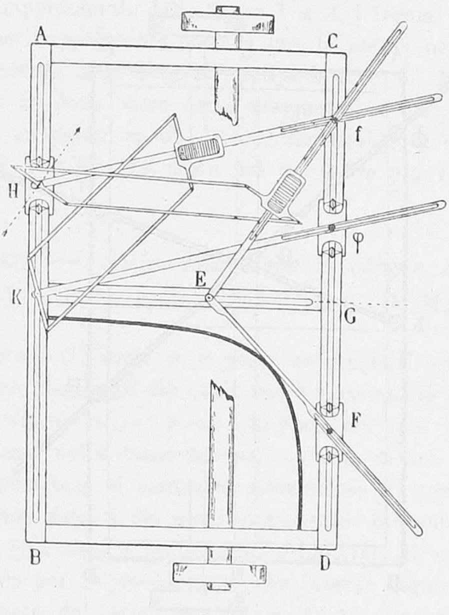

Fig. 1.

Inseriamo perciò una *mediana* MN fra le due righe parallele AB, CD, in modo cioè che MN sia parallela ed equidistante dalle due righe estreme (fig. 2): e indi sulla riga AB poniamo un carrello Φ che descriva la curva assegnata Φ, mentre due aste rettilinee scanalate, ΦF e Kf si incontrino sul perno O di un carrello obbligato a scorrere sulla riga MN.

Sarà in tal modo, costantemente, $K\Phi = fF$; e, facendo scorrere il carrello Φ sulla curva Φ e il carrello φ (fig. 1) sulla curva φ (ottenuta dalla φ' con una preventiva integrazione), tutto l'apparecchio si muoverà in modo che le punte connesse ai carrelli F e f descriveranno precisamente queste curve incognite in maniera da soddisfare le (4); si potrà naturalmente collegare ai carrelli F e f due matite scriventi.

La simmetrica, rispetto all'asse delle x, della curva descritta dal carrello F, è precisamente la curva F, cioè quella le cui ordinate sono i valori della funzione $F(x)$.

Ottenuta F, e applicando lo stesso strumento della fig. 1, come nel § 17 del precitato mio libro, si può integrare la prima delle (2) e ottenere y, e indi, riapplicando ancora lo stesso strumento, si può integrare la seconda delle (2) (di cui ora sono noti i coefficienti f e y); e si otterrà infine z, integrale della (1).

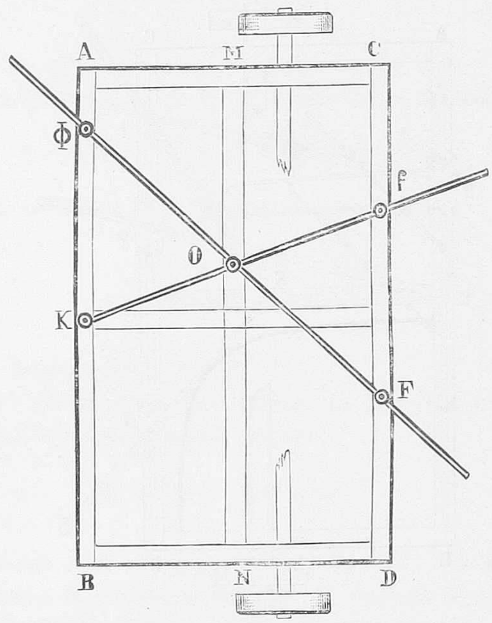

Fig. 2.

3. Prima di terminare aggiungiamo due osservazioni.

La prima è che, eliminando F tra le (4), si ha l'equazione

$$f' + f^2 = \Phi f + \varphi', \tag{6}$$

equazione di Riccati che resta integrata dall'apparecchio che ho descritto.

Nei §§ 4 e 12 del mio libro già citato ho descritto degli apparecchi per l'integrazione di due speciali tipi canonici dell'equazione di Riccati, cioè i tipi

$$f' = (Q - f)^2 \tag{7}$$

e

$$af' + \frac{f^2}{b} = Q, \tag{8}$$

dove a, b sieno costanti, e Q sia una funzione della variabile indipendente.

Un'equazione generale di Riccati,

$$f' = Pf^2 + Qf + R\,, \tag{9}$$

è sempre riducibile a ciascuno dei tipi (6), (7), (8); ma è naturale che al tipo (6) è riducibile assai più facilmente; basta infatti operare la trasformazione della variabile indipendente x in $x_1 = -\int P\,dx$.

4. La seconda osservazione è che, anche a prescindere dalla costruzione dell'apparecchio rappresentato dalle figure 1 e 2, i legami imposti alle varie righe che formano l'apparecchio possono dare la norma per una *costruzione grafica approssimata* dell'integrale dell'equazione di 2° ordine. Basterà dividere l'ascissa x, delle varie curve assegnate, in tanti piccoli intervalli eguali e seguire un procedimento *discontinuo* analogo a quello tenuto, per uno scopo simile, alla fine del § 19 del mio libro più volte citato.

Matematica. — *Sulla definizione di coppie, terne,* ecc. Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Ho già indicato [1] come ci si possa servire degli *operatori* per definire *nominalmente* degli enti dei quali finora si conosceva soltanto la definizione o *per astrazione*, o *per classi*. Applico ora tale procedimento alla definizione nominale delle *coppie*, *terne*, ... che, di uso continuo nella logica e nella matematica, si assumono attualmente [2] come *enti primitivi*, cioè come enti non definiti dei quali si assegnano convenienti proprietà atte a caratterizzarli (postulati o proposizioni primitive). Il concetto di operatore, fondamentale per il procedimento che intendo seguire, è già stato ampiamente analizzato dal prof. S. Catania [3] ed ottenuto sotto due forme

[1] G. Burali-Forti, *Nuove applicazioni degli operatori*. Atti Acc. Torino, vol. L, adunanza del 7 marzo 1915. Anche le classi *area*, *volume* possono essere definite senza ricorrere alla *classe di Russel* (cfr. Osservazioni) come *elemento ausiliario* (e *non* come elemento essenziale!) il che, allora, non mi pareva facile. Essendo a un *poligono piano* e α un *prisma*, area a e vol α si possono definire quali operatori tra *coppie* (x, y), *terne* (x, y, z) di *punti distinti* e *classi di punti* tali che:

(area a) $(x, y) =$ « classe dei punti m tali che il triangolo di vertici x, y, m, è *equivalente* ad a »;

(vol α) $(x, y, z) =$ « classe dei punti m tali che il prisma, di cui una base è il triangolo xyz e il piano dell'altra base passa per m, è *equivalente* ad α ».

[2] Cfr. *Formulario matematico* di G. Peano.

[3] S. Catania, *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano* (Questi Rendiconti, vol. XXII, ser. 5ª, 2° sem., pp. 546-551, 639-642, an. 1913); *Grandezze e numeri*, Catania, cav. Niccolò Giannotta editore, 1915.