ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Un'equazione generale di Riccati,

$$(9) \qquad f' = Pf^2 + Qf + R\,,$$

è sempre riducibile a ciascuno dei tipi (6), (7), (8); ma è naturale che al tipo (6) è riducibile assai più facilmente; basta infatti operare la trasformazione della variabile indipendente x in $x_1 = -\int P\,dx$.

4. La seconda osservazione è che, anche a prescindere dalla costruzione dell'apparecchio rappresentato dalle figure 1 e 2, i legami imposti alle varie righe che formano l'apparecchio possono dare la norma per una *costruzione grafica approssimata* dell'integrale dell'equazione di 2° ordine. Basterà dividere l'ascissa x, delle varie curve assegnate, in tanti piccoli intervalli eguali e seguire un procedimento *discontinuo* analogo a quello tenuto, per uno scopo simile, alla fine del § 19 del mio libro più volte citato.

Matematica. — *Sulla definizione di coppie, terne,* ecc. Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo.

Ho già indicato [1] come ci si possa servire degli *operatori* per definire *nominalmente* degli enti dei quali finora si conosceva soltanto la definizione o *per astrazione*, o *per classi*. Applico ora tale procedimento alla definizione nominale delle *coppie*, *terne*, ... che, di uso continuo nella logica e nella matematica, si assumono attualmente [2] come *enti primitivi*, cioè come enti non definiti dei quali si assegnano convenienti proprietà atte a caratterizzarli (postulati o proposizioni primitive). Il concetto di operatore, fondamentale per il procedimento che intendo seguire, è già stato ampiamente analizzato dal prof. S. Catania [3] ed ottenuto sotto due forme

[1] G. Burali-Forti, *Nuove applicazioni degli operatori*. Atti Acc. Torino, vol. L, adunanza del 7 marzo 1915. Anche le classi *area*, *volume* possono essere definite senza ricorrere alla *classe di Russel* (cfr. Osservazioni) come *elemento ausiliario* (e *non* come elemento essenziale!) il che, allora, non mi pareva facile. Essendo a un *poligono piano* e α un *prisma*, area a e vol α si possono definire quali operatori tra *coppie* (x, y), *terne* (x, y, z) di *punti distinti* e *classi di punti* tali che:

(area a) $(x, y) =$ « classe dei punti m tali che il triangolo di vertici x, y, m, è *equivalente* ad a »;

(vol α) $(x, y, z) =$ « classe dei punti m tali che il prisma, di cui una base è il triangolo xyz e il piano dell'altra base passa per m, è *equivalente* ad α ».

[2] Cfr. *Formulario matematico* di G. Peano.

[3] S. Catania, *Sul concetto di funzione monodroma e su quelli che da essa derivano* (Questi Rendiconti, vol. XXII, ser. 5ª, 2° sem., pp. 546-551, 639-642, an. 1913); *Grandezze e numeri*, Catania, cav. Niccolò Giannotta editore, 1915.

diverse. Una di queste implica il concetto di *coppia*, l'altra ne è indipendente. Affinchè non possa nascere il dubbio che il procedimento che ora seguo per definire le coppie, terne, ..., contenga un *circolo vizioso*, riporto, alquanto modificata, la definizione di operatore del tutto indipendente dal concetto di coppia.

1. Per l'*eguaglianza*, o *identità*, indicata dal simbolo $=$, intendiamo valga la definizione di Leibniz: $x = y$, solamente quando, qualsiasi proprietà di x è altresì proprietà di y; ovvero con i simboli *idrografici* di G. Peano,

[1] $$x = y \,:=:\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Cls} \cdot x \,\varepsilon\, a \cdot \supset_a \cdot y \,\varepsilon\, a\,.$$

Ricordiamo, sebbene possa parere superfluo, che dalla [1] derivano le proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*,

(*a*) $$x = x \quad , \quad x = y \cdot \supset \cdot y = x \quad , \quad x = y \cdot y = z \cdot \supset \cdot x = z\,,$$

del simbolo di relazione $=$, ma che da queste *non deriva* la [1] (come lo provano, ad es., le relazioni *è parallela a*, *è simile a*) e quindi che le (*a*) *non* possono esser chiamate *proprietà caratteristiche* della eguaglianza o identità.

Ricordiamo ancora che, una volta ammessa la [1] per stabilire il significato della relazione $x = y$, non è più lecito ([4]), per gli elementi di una classe speciale u, assumere ad arbitrio il significato di $x = y$; si deve invece definire la classe u in modo che dalla [1] *risulti* lo speciale significato di $x = y$ per x e y elementi di u ([5]).

2. In ciò che segue dobbiamo spesso considerare delle classi u, ciascuna delle quali contiene effettivamente più di un elemento, cioè ne con-

([4]) C. Burali-Forti, *Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science*. Enseignement mathematique, 1899.

([5]) La comune *definizione per astrazione* (cfr. *Formulario matematico*), dovuta in sostanza ad Euclide, presenta tre notevoli difetti logici:

a) per la classe u che si intende introdurre, occorre *definire* il significato della relazione $x = y$, per x, y elementi di u;

b) la predetta condizione $x = y$, fissata *ad libitum*, non individua una sola classe u; ne esistono infinite, per le quali $x = y$ ha il significato stabilito;

c) anche ammessa la possibilità di poter scegliere, tra le infinite classi u [e, si intende, senza l'intervento di nuovi elementi che definiscano nominalmente u; cfr. ([1])], una speciale, gli elementi di questa restano individuati in infiniti modi.

Nella mia Nota: *Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni* (questi Rendiconti, vol. XXI, ser. 5ª, 2° sem. 1912, pp. 677-682), ho tolti i difetti *a*), *b*), ma ho pure dimostrato che, anche con la nuova via, è impossibile di togliere il difetto *c*). È quindi conveniente di abbandonare del tutto le definizioni per astrazione, sotto qualsiasi forma, visto che è possibile — e senza ricorrere alle difettose definizioni per classi — di far uso delle definizioni mediante operatori. (Cfr. T. Boggio, Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, fasc. IV, 1915).

tiene almeno due. Indicheremo con Cls′ l'insieme di tali classi, cioè porremo

[2] $$\mathrm{Cls}' = \mathrm{Cls} - \iota\Lambda \cap u \ni \{ x \varepsilon u \,.\, \supset_x .\, \exists\, u - \iota x \} ;$$

cioè: u è una Cls′ solo quando « u è una classe non nulla, ed essendo x un individuo di u, si ha, qualunque sia x, che esiste almeno un u diverso da x ».

Ci sarà pure utile di considerare l'insieme di tutti gli enti x, ciascuno dei quali gode della proprietà che « esiste almeno una classe non nulla u della quale x è un individuo (un elemento) ». Tale insieme lo indicheremo con la notazione Elem, abbreviazione di *elemento*,

[3] $$\mathrm{Elem} = x \ni [\exists\, \mathrm{Cls} - \iota\Lambda \cap u \ni (x \varepsilon u)] .$$

Si intende che al simbolo Elem intendiamo dare *soltanto* il significato espresso dal secondo membro della [3] e nessuno dei varî significati speciali che la parola *elemento* può avere nel linguaggio comune o in altre trattazioni di logica ideografica ([6]). Ad es., il fatto che x è un Elem, non esclude che x sia una classe, o classe di classi; basta che una classe u, contenente x, sia classe di classe, o classe di classe di classi, perchè x sia classe, o classe di classi.

3. Quando, per x scelto ad arbitrio in un conveniente campo di numeri, si definiscono le notazioni, ad es.

$$x! \quad , \quad \mathrm{sen}\, x ,$$

si ammette implicitamente che il simbolo (semplice) ! scritto a *destra* di x, o il simbolo (composto) sen scritto a *sinistra* di x, senza che tra x e ! o sen si interponga alcun altro simbolo, produca un certo ente.

Nulla impedisce che tale *azione grafica* si generalizzi. Noi consideriamo la classe, che indicheremo brevemente con

$$\mathrm{S} ,$$

formata da tutti i

« simboli, semplici o composti, f, tali che la notazione

$$x f \ , \ \text{ovvero} \ f x ,$$

ottenuta scrivendo f a destra o a sinistra di un conveniente elemento x,

([6]) C. Burali-Forti, *Les propriétés formales des opérations algébriques* (Revue de mathématiques publiée par G. Peano, tomo VI, pp. 141-177, 1896-1899). In questa Memoria il simbolo Elem è indicato da $\cup$ ‘ Cls; per tale simbolo, e per conservare l'analogia con $\cup$ ‘ u, ove u è classe di classi (cfr. *Formulario*), occorse ammettere che Cls è una classe di classi, il che può essere o no ammissibile a seconda del valore logico del simbolo Cls. Evito ogni discussione introducendo il simbolo Elem il cui significato preciso è dato dal secondo membro della [3].

e senza che tra x e f si interponga altro simbolo [eccettuati parentesi o punti (7) come separatori], abbia un significato ».

La classe S è vastissima. Comprende gli ordinarî simboli !, sen, cos, tg, ctg, log, ...; per a numero reale o complesso contiene i simboli composti $a+$, $a-$, $a\times$, $a/$ come pure i simboli $+a$, $-a$ (ordinarî numeri relativi), $\times a$, $/a$ (per a non nullo); per $\mathbf{u}$ vettore contiene i simboli composti $+\mathbf{u}$, $-\mathbf{u}$ (traslazioni), $\mathbf{u}\wedge$ (omografia assiale), $\mathbf{u}\times$; ecc.

Gli elementi di S compariscono come enti collegati a *forme di scrittura*, cioè dipendenti da una *azione grafica*. Tale azione grafica, e con essa la classe S, può esser considerata come *primitiva* (8) rispetto alla logica ideografica, ma ciò non toglie che la frase sopra scritta entro virgolette fissi i caratteri che deve avere un simbolo f per appartenere alla classe S e quindi individui la classe stessa S. Del resto, anche le forme di logica ideografica non sono indipendenti da *forme di scrittura*, o *azioni grafiche*, e sarà difficile, per non dire impossibile, di *definire mediante simboli ideografici* la classe S; nè tale impossibilità può distruggere l'esistenza effettiva e pratica della classe S.

4. Sia u una Cls' e v una Cls non nulla. Noi diremo che f è un « operatore a sinistra tra gli u e i v »,

$$\mathrm{Op}\,(u\,,v)\,,$$

quando f è un elemento della classe S, tale che, se x è un u, si ha, qualunque sia x, che fx è un v;

[4] $$u\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}'\cdot v\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}-\iota\Lambda\cdot\supset\cdot\mathrm{Op}(u\,,v)=\mathrm{S}\cap f\ni\{x\,\varepsilon\,u\cdot\supset_x\cdot fx\,\varepsilon\,v\}\,.$$

Diremo che f è un « operatore a sinistra per gli u »,

$$\mathrm{Op}\,u\,,$$

quando è operatore tra gli u ed una qualche classe v;

[5] $$u\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}'\cdot\supset\cdot\mathrm{Op}\,u=\mathrm{Op}(u\,,v)\mid v\,\text{‘}\,\mathrm{Cls}-\iota\Lambda\,.$$

Infine diremo che f è un « operatore a sinistra »,

$$\mathrm{Op}\,^*\,,$$

quando è operatore per qualche classe (Cls');

[6] $$\mathrm{Op}^*=\mathrm{Op}\,u\mid u\,\text{‘}\,\mathrm{Cls}')\,.$$

(7) Si scriverà $x(f)$, $(x)f$, $(x)(f)$, $x.f$, e analogamente per fx, quando x o f siano simboli composti e tali che la notazione xf possa produrre equivoci per i diversi modi di scomposizione. In ogni caso le parentesi e il punto hanno *soltanto* l'ufficio di *separatori*, e non altro.

(8) E così ha fatto il Catania: cfr. (3).

Per gli operatori a destra varranno le notazioni

$$(u\,,v)\,\mathrm{Op} \quad , \quad u\,\mathrm{Op} \quad , \quad {}^{*}\mathrm{Op}\,;$$

ma in generale parleremo di operatori a sinistra, intendendo che per quelli a destra siano ripetute le medesime cose.

La classe Op* è una parte propria della classe S; sia perchè le classi $u\,,v$ considerate non sono del tutto arbitrarie [9], sia perchè nella [4] è stabilito (il che non è stato fatto per S) che, se f è un $\mathrm{Op}(u\,,v)$ e x è un u, allora fx è uno, ed un solo, elemento della classe v che, naturalmente, dipende da x e da una legge che può ritenersi espressa, almeno formalmente, dal simbolo f che non varia col variare di x in u. In altri termini, la [4] stabilisce, sotto certe condizioni per $u\,,v$, che $\mathrm{Op}(u\,,v)$ è ciò che comunemente chiamasi *corrispondenza univoca tra gli u e i v*, il che non è detto per la classe generale S.

5. Per chiarire meglio il significato di $\mathrm{Op}(u\,,v)$, e anche per avere una base per future discussioni, gioverà indicare le proprietà fondamentali degli operatori.

[7] $$u\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}'\cdot f\,\varepsilon\,\mathrm{Op}\,u\cdot x\,,y\,\varepsilon\,u\cdot x=y\cdot\supset\cdot fx=fy:$$

« un operatore per gli u, applicato ad elementi eguali di u, dà elementi pure eguali », il che conferma l'univocità della corrispondenza tra gli u e i v.

Infatti: essendo $fx=fx$ (proprietà riflessiva dell' $=$), è certo che x è uno degli elementi z di u tali che $fx=fz$; ma se $x=y$, allora per la [1] anche y è uno dei tali elementi z e quindi $fx=fy$ (cfr. *Formulario*).

[8] $$u\,,v\,\varepsilon\,\mathrm{Cls}'\cdot v\supset u\cdot\supset\cdot\mathrm{Op}\,u\supset\mathrm{Op}\,v:$$

« un operatore per la classe u è anche operatore per una classe v contenuta in u, si intende purchè $u\,,v$ siano delle Cls′ », il che è evidente per la [4].

[9] $$f\,,g\,\varepsilon\,\mathrm{Op}^{*}\cdot\supset\therefore f=g\cdot=:x\,\varepsilon\,\mathrm{Elem}\cdot\supset_x\cdot fx=gx:$$

« due operatori (a sinistra) sono identici solamente quando, applicati ad uno stesso elemento, qualunque esso sia, dànno lo stesso resultato » [10], cioè: se fx appartiene ad una classe v, anche gx vi appartiene, ed è lo stesso v

[9] Ad es., $\mathrm{Op}(u,v)$ non corrisponde esattamente al $v\,f\,u$ del *Formulario* di Peano, perchè in $v\,f\,u$ le classi $u\,,v$ sono qualunque. Però quando u è una Cls′ e v una classe non nulla, ogni $\mathrm{Op}(u\,,v)$ è pure un $v\,f\,u$.

[10] Cfr. [6] pag. 144, III· 3.

indicato da fx; e se fx è privo di significato (ha la proprietà di non aver significato), anche gx è privo di significato [11].

Interessa dimostrare in modo completo la [9].

L'ipotesi f, g sono Op* è sempre sottintesa, ma si considera sempre presente.

a) Sia $f = g$.

Essendo $fx = fx$, è certo che f è uno degli operatori h tali che $fx = hg$; ma essendo $f = g$, anche g (cfr. [1]) è uno degli operatori h ora considerati, cioè $fx = gx$.

Dunque: $f = g \cdot \supset : x \,\varepsilon\, \mathrm{Elem} \cdot \supset_x \cdot fx = gx$.

b) Supponiamo; $x \,\varepsilon\, \mathrm{Elem} \cdot \supset_x \cdot fx = gx$.

Ogni *possibile* proprietà di f è della forma (cfr. le [4], [6])

$$f \,\varepsilon\, \mathrm{Op}(u, v),$$

ove u è una Cls′ e v è una classe non nulla; ma, per l'ipotesi *b*), la stessa proprietà (cfr. la [4]) appartiene anche a g: vale a dire, per la definizione di $=$, si ha che $f = g$.

Dunque: $x \,\varepsilon\, \mathrm{Elem} \cdot \supset_x \cdot fx = gx : \supset : f = g$.

Da *a*) e *b*) si deduce la [9] [12].

Crediamo inutile riportare altre proprietà degli operatori [13]. Vogliamo solo ripetere per qual ragione nella [4] si è supposto che u sia una Cls′ in luogo di una Cls qualunque. Se f è un $\mathrm{Op}(u, v)$ e x è un u, allora, nella notazione fx, che indica un v, x è certamente un S che, scritto a destra di f, produce il v considerato. Se, allora, nella [4], u fosse una classe qualunque, risulterebbe che x è un « operatore a destra tra gli *eguali ad* f e ai v », proprietà che, in generale, l'ente x di u *non ha*; si cadrebbe cioè in un assurdo. Invece, con la limitazione posta per u nella [4], x non

(11) Supposto che l'essere *fx privo di significato* possa urtare una qualche suscettibilità logica, allora basta dare alla [9] la forma seguente:

[9′] $$f; g \,\varepsilon\, \mathrm{Op}^* . \supset \therefore f = g . = : x \,\varepsilon\, \mathrm{Elem} . fx, gx \,\varepsilon\, \mathrm{Elem} - \supset_x . fx = gx .$$

Il prof. S. Catania mi comunica che in un suo lavoro di prossima pubblicazione dà alla condizione di eguaglianza la forma seguente:

$$f, g \,\varepsilon\, \mathrm{Op} \cdot \supset :: f = g . = \therefore g \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}' . \supset_u : f \,\varepsilon\, \mathrm{Op}\, u . = . u \,\varepsilon\, \mathrm{Op}\, u \therefore$$
$$u \,\varepsilon\, \mathrm{Cls}' . f, g \,\varepsilon\, \mathrm{Op}\, u . x \,\varepsilon\, u . \supset_{u,x} . fx = gx .$$

Questa più ampia forma delle [9], [9′] è più chiara, o almeno più comprensibile, perchè indica esplicitamente dei particolari che nelle [9]. [9′] sono conseguenze della ipotesi generale « f, g sono operatori a sinistra ».

(12) La stessa dimostrazione si applica alla [9′] e alla forma del prof. Catania indicata nella nota precedente.

(13) Per l'uso pratico degli operatori cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analyse vèctorielle générale*, vol. I e II, Mattei, Pavia.

può essere « operatore a destra tra gli *eguali ad* f e ai v », perchè gli « eguali ad f » formano una classe contenente *un solo elemento*, l' f, e in tal caso l' Op non è stato definito. Questa opportuna limitazione della classe u in Op u è dovuta al prof. S. Catania (cfr. (3), *Grandezze e numeri*).

6. Visto come gli operatori si possano definire indipendentemente dalle *coppie*, occupiamoci della definizione di queste, il che forma l'oggetto principale di questa Nota.

Se a, b sono elementi qualunque per la « coppia della quale a è il primo e b il secondo elemento », adotteremo la notazione, senza parentesi, del *Formulario*,

$$a\,;b\,,$$

ma nulla impedisce che si adotti la notazione usuale $(a\,,b)$.

[10] $$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{Elem}\cdot\mathrm{Ɔ}\cdot a\,;b=$$
$$=\text{ɿ}[\mathrm{Op}^{\star}\cap f\text{ɜ}\,\{fa=\iota a\cdot fb=\iota b:x\,\varepsilon\,\mathrm{Elem}-(\iota a\cup\iota b)\cdot\mathrm{Ɔ}_x\cdot fx=\iota a\cup\iota b\}]:$$

« essendo a, b elementi qualunque, definiamo la coppia $a\,;b$ come quell'operatore a sinistra che, applicato ad a, dà la classe degli eguali ad a, applicato a b dà la classe degli eguali a b, ed applicato ad un elemento diverso da a e da b dà la classe che ha per elementi a e b soltanto ».

Dati gli elementi a, b, la coppia $a\,;b$ è un operatore univocamente determinato per la classe Elem

[11] $$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{Elem}\cdot\mathrm{Ɔ}\cdot a;b\,\varepsilon\,\mathrm{Op\,Elem}\,,$$

poichè la [10] individua la classe $(a;b)x$ per x scelto ad arbitrio nella classe Elem.

L'ordinaria condizione di eguaglianza di due coppie,

[12] $$a\,,b\,,a'\,,b'\,\varepsilon\,\mathrm{Elem}\cdot\mathrm{Ɔ}\,.\because a\,;b=a'\,;b':=:a=a'\cdot b=b',$$

risulta dalle [1] [10] come ora dimostriamo.

In virtù delle [9] [10], la condizione $a\,;b=a'\,;b'$ equivale alla condizione

(1) $$(a\,;b)\,x=(a'\,;b')\,x\,,\quad \text{qualunque sia l'elemento } x\,.$$

a) Supponiamo $a=a'$ e $b=b'$.

La (1) è verificata per $x=a=a'$, per $x=b=b'$ e per x diverso da a e da b, e quindi anche da a' e da b'; cioè è verificata per x elemento arbitrario.

Dunque: $a=a'\cdot b=b'\cdot\mathrm{Ɔ}\cdot a;b=a';b'$.

b) Supponiamo $a;b=a';b'$.

Per x diverso da a, b, a', b' la (1) e la [10] dànno

$$\iota a \cup \iota b = \iota a' \cup \iota b'$$

che è verificata solamente quando

$$a = a' \text{ e } b = b' \quad \text{ovvero} \quad a = b' \text{ e } b = a';$$

vale a dire

(2) da $a ; b = a' ; b'$ segue $a = a'$ e $b = b'$, *oppure*

(3) da $a ; b = a' ; b'$ segue $a = b'$ e $b = a'$.

Ma la (1) deve esser verificata anche per x identico ad uno qualunque degli elementi a, b, a', b'. Se vale la (2), allora vale pure la (1). Se vale la (3), allora da a) risulta $a ; b = b ; a$ che, per $x = a = b'$ ovvero per $x = b = a'$, dà $a = b$. Dunque, se $a -= b$, la (3) non è possibile; e se $a = b$, la (3) coincide con la (2).

Dunque: $a ; b = a' ; b' \cdot \supset \cdot a = a' \cdot b = b'$.

Da a) e b) si deduce la [12].

7. Per le *terne*, e per le successioni di *quattro*, *cinque*, ... elementi, si ripetono le cose precedenti. Ad es., per le terne si ha:

[13] $a, b, c \,\varepsilon\, \text{Elem} \cdot \supset \cdot a ; b ; c = \text{℩}[\text{Op}^* \cap f \ni \{ fa = \iota a \cdot fb = \iota b \cdot fc =$
$= \iota c : x \,\varepsilon\, \text{Elem} - (\iota a \cup \iota b \cup \iota c) \cdot \supset_x \cdot fx = \iota a \cup \iota b \cup \iota c \}]$

[14] $a, b, c \,\varepsilon\, \text{Elem} \cdot \supset \cdot a ; b ; c \,\varepsilon\, \text{Op Elem}$

[15] $a, b, c, a', b', c' \,\varepsilon\, \text{Elem} \cdot \supset .\because a ; b ; c = a' ; b' ; c' : = :$
$a = a' \cdot b = b' \cdot c = c'$.

Nel *Formulario* la terna $a ; b ; c$ è definita identificandola alla coppia della quale $a ; b$ è il primo e c il secondo elemento,

(1) $$a ; b ; c = (a ; b) ; c.$$

Ma non vi è ragione speciale per fare la posizione (1) piuttosto che la

(2) $$a ; b ; c = a ; (b ; c);$$

e poichè le due posizioni (1), (2) sono contraddittorie, — giacchè non può essere $a ; b = a$ e $c = b ; c$, — pare preferibile di dare della terna la definizione diretta [13]. È indiscutibile che le (1), (2) *non sono conseguenze delle* [13], [10].

Una volta definite le coppie, terne, ..., si possono definire nel modo usuale (cfr. *Formulario*) le classi di coppie e terne formate con gli elementi di date classi: ad es.,

[16] $u, v \,\varepsilon\, \text{Cls} - \iota \Lambda \cdot \supset \cdot u \,\dot{;}\, v = (x ; y) \ni \{ x \,\varepsilon\, u \cdot y \,\varepsilon\, v \}$, ecc.;

si possono considerare gli operatori binarî, ternarî, ... già contenuti nella [4] per u classe di coppie, di terne, ... ; si ottengono i simboli di *operazione* dagli operatori binari [cfr. (3), (13)]; ecc.

Giova notare esplicitamente che, una volta ottenuta la condizione di eguaglianza per le coppie, terne, ..., la definizione di queste come operatori più non ha, in generale, bisogno di essere adoperata [cfr. (1)] esplicitamente nelle varie questioni nelle quali compariscono coppie, terne, ... E ciò [cfr. (1) ultimo capoverso della prefazione] non costituisce un difetto della definizione ora data.

Matematica. — *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici.* Nota I di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sia σ una superficie chiusa, che individua una regione S dello spazio; Q un suo punto generico;

$$f(\mathrm{Q}) = 0 \tag{1}$$

la sua equazione; $\mathbf{n}$ il vettore unitario normale a σ in Q e diretto verso S.

Sia σ' un'altra superficie, che poco differisce da σ, luogo dei punti

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{Q} + \varepsilon \mathbf{n}, \tag{2}$$

dove

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{Q})$$

è una funzione regolare, comunque assegnata, dei punti Q di σ.

La relazione (2) stabilisce una corrispondenza fra i punti di σ e quelli di σ'. L'ipotesi che la superficie σ' poco differisce dalla originaria superficie σ, viene analiticamente tradotta dalla circostanza che il limite superiore di $|\varepsilon|$ sia così piccolo di fronte alle dimensioni lineari di σ, da potersi trattare, rispetto a queste, come quantità di primo ordine.

Ciò posto, si sappiano risolvere, nel campo S, i problemi di Dirichlet e di Neumann: si sappia, cioè, determinare una funzione U(P) armonica e regolare nei punti P di S (e, se S è lo spazio esterno a σ, soddisfacente alle solite condizioni all'infinito) e tale che sul contorno σ assumano valori prefissati o la funzione stessa (problema di Dirichlet) oppure la sua derivata normale (problema di Neumann). Le corrispondenti formole risolutive sono (ciò è ben noto) le seguenti:

$$\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{U}(\mathrm{Q})\,\frac{d\,\mathrm{G}(\mathrm{P},\mathrm{Q})}{dn_{\mathrm{Q}}}\,d\sigma_{\mathrm{Q}}\,; \tag{3}$$

$$\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \mathrm{U}_0 + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{d\mathrm{U}(\mathrm{Q})}{dn_{\mathrm{Q}}}\,\Gamma(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,d\sigma_{\mathrm{Q}}\,; \tag{4}$$