ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

si possono considerare gli operatori binarî, ternarî, ... già contenuti nella [4] per u classe di coppie, di terne, ... ; si ottengono i simboli di *operazione* dagli operatori binari [cfr. ([3]), ([13])]; ecc.

Giova notare esplicitamente che, una volta ottenuta la condizione di eguaglianza per le coppie, terne, ... , la definizione di queste come operatori più non ha, in generale, bisogno di essere adoperata [cfr. ([1])] esplicitamente nelle varie questioni nelle quali compariscono coppie, terne, ... E ciò [cfr. ([1]) ultimo capoverso della prefazione] non costituisce un difetto della definizione ora data.

Matematica. — *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici.* Nota I di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Sia σ una superficie chiusa, che individua una regione S dello spazio; Q un suo punto generico;

$$f(\mathrm{Q}) = 0 \tag{1}$$

la sua equazione; $\mathbf{n}$ il vettore unitario normale a σ in Q e diretto verso S.

Sia σ' un'altra superficie, che poco differisce da σ, luogo dei punti

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{Q} + \varepsilon\,\mathbf{n}\,, \tag{2}$$

dove

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{Q})$$

è una funzione regolare, comunque assegnata, dei punti Q di σ.

La relazione (2) stabilisce una corrispondenza fra i punti di σ e quelli di σ'. L'ipotesi che la superficie σ' poco differisce dalla originaria superficie σ, viene analiticamente tradotta dalla circostanza che il limite superiore di $|\varepsilon|$ sia così piccolo di fronte alle dimensioni lineari di σ, da potersi trattare, rispetto a queste, come quantità di primo ordine.

Ciò posto, si sappiano risolvere, nel campo S, i problemi di Dirichlet e di Neumann: si sappia, cioè, determinare una funzione U(P) armonica e regolare nei punti P di S (e, se S è lo spazio esterno a σ, soddisfacente alle solite condizioni all'infinito) e tale che sul contorno σ assumano valori prefissati o la funzione stessa (problema di Dirichlet) oppure la sua derivata normale (problema di Neumann). Le corrispondenti formole risolutive sono (ciò è ben noto) le seguenti:

$$\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{U}(\mathrm{Q})\,\frac{d\,\mathrm{G}(\mathrm{P},\mathrm{Q})}{dn_{\mathrm{Q}}}\,d\sigma_{\mathrm{Q}}\,; \tag{3}$$

$$\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \mathrm{U}_0 + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{d\mathrm{U}(\mathrm{Q})}{dn_{\mathrm{Q}}}\,\Gamma(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,d\sigma_{\mathrm{Q}}\,; \tag{4}$$

dove G e Γ designano la *funzione di Green* e la *funzione di Neumann* [1]; U_0 è una costante, a priori arbitraria, che ha il significato di valor medio dei valori che la funzione U assume sulla superficie σ,

$$U_0 = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma U(Q)\,d\sigma\,;$$

infine n_Q designa manifestamente la direzione di $\mathbf{n}$ in Q.

Scopo della presente Nota è di mostrare come gli stessi problemi si possono risolvere nello spazio S', determinato dalla superficie σ', mediante le formole (3) e (4) che si riferiscono allo spazio S [2].

1. Equazione di σ'. — La eliminazione di Q, fra la (1) e la (2), dà luogo alla equazione della superficie σ'. Questa operazione si rende agevole se si nota che, a meno di quantità di ordine superiore al primo, è

$$\varepsilon(Q') = \varepsilon(Q)\,;$$

si ha infatti allora

$$f[Q' - \varepsilon(Q')\,\mathbf{n}] = 0\,.$$

Ma, con la cennata approssimazione, si ha [3]

$$f[Q' - \varepsilon(Q')\,\mathbf{n}] = f(Q') - \frac{df(Q')}{dQ'}\,\varepsilon(Q')\,\mathbf{n}\,;$$

[1] Se P e P_1 è una coppia di punti generici di S, e $G^*(P, P_1)$, $\Gamma^*(P, P_1)$ sono due funzioni simmetriche rispetto a P e P_1, *armoniche* e regolari in S rispetto a ciascuno dei punti P e P_1 e soddisfacenti su σ rispettivamente alle condizioni seguenti:

$$G^*(Q, P_1) = \frac{1}{\mathrm{mod}\,(Q - P_1)}\,,\qquad \frac{d\,\Gamma^*(Q, P_1)}{dn_Q} = \frac{4\pi}{\sigma} - \frac{d}{dn_Q}\,\frac{1}{\mathrm{mod}\,(Q - P_1)}$$

(nonchè alle solite condizioni all'∞, se S è lo spazio esterno a σ), le funzioni G e Γ sono rispettivamente definite dalle seguenti relazioni:

$$G(P, P_1) = \frac{1}{\mathrm{mod}\,(P - P_1)} - G^*(P, P_1)\,,\quad \Gamma(P, P_1) = -\frac{1}{\mathrm{mod}\,(P - P_1)} - \Gamma^*(P, P_1)\,.$$

[2] Cfr. gli interessanti studî di Hadamard e del suo allievo Paul Lévy sulle variazioni delle funzioni (1^a e 2^a) di Green per una deformazione infinitesima del campo. [Mi limito a citare il più recente: Lévy, *Sur la fonction de Green ordinaire et la fonction de Green d'ordre deux relatives au cilindre de révolution*. Rend. del Circ. mat. di Palermo, tomo XXXIV (1912), pp. 187-219]. — Il Viterbi ha stabilito per il problema di Dirichlet una funzione *maggiorante* che permette di valutare il grado di approssimazione che si ha assumendo per lo spazio S' la soluzione del problema relativo allo spazio S [*Su la risoluzione approssimata del problema di Dirichlet*. Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVII (1914), pp. 763-796].

[3] Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale. - II. Applications à la mécanique et à la physique*. Pavie, Mattei, 1913, pag. 17.

ovvero, essendo

$$\frac{df(Q')}{dQ'}\,\varepsilon(Q')\,\mathbf{n} = \varepsilon\,\mathbf{n} \times \operatorname{grad} f = \varepsilon\,\frac{df}{dn}\,,$$

si ha

$$f\,[Q' - \varepsilon\,\mathbf{n}] = f - \varepsilon\,\frac{df}{dn}\,.$$

Pertanto l'equazione di σ' può scriversi

$$f - \varepsilon\,\frac{df}{dn} = 0\,. \tag{5}$$

2. Relazione tra i vettori unitarii normali a σ e a σ'. — Sarà opportuno caratterizzare anche il vettore unitario $\mathbf{n}'$ normale in Q' a σ' e diretto verso S'.

Si noti, a tal uopo, che mentre $\mathbf{n}$, vettore unitario normale a σ, è definito, a meno di una conveniente scelta del segno, dalla relazione vettoriale

$$\mathbf{n} = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f\,|}\,, \tag{6}$$

sarà in modo analogo, per la (5),

$$\mathbf{n}' = \frac{\operatorname{grad}\left(f - \varepsilon\,\dfrac{df}{du}\right)}{\left|\operatorname{grad}\left(f - \varepsilon\,\dfrac{df}{dn}\right)\right|}\,. \tag{7}$$

Ma, con la voluta approssimazione, è

$$\left|\operatorname{grad}\left(f - \varepsilon\,\frac{df}{dn}\right)\right| = \left|\operatorname{grad} f\,\right| \left\{ 1 - \frac{(\operatorname{grad} f) \times \operatorname{grad}\left(\varepsilon\,\dfrac{df}{dn}\right)}{(\operatorname{grad} f)^2} \right\}$$

Posto

$$\mathbf{v} = \frac{\operatorname{grad}\left(\varepsilon\,\dfrac{df}{dn}\right)}{|\operatorname{grad} f\,|} \tag{8}$$

si ha, sostituendo nella (7), qualora si tenga presente la (6),

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{v} + (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\,\mathbf{n}\,. \tag{9}$$

Questa formola definisce il vettore unitario $\mathbf{n}'$ normale a σ' nel punto Q' corrispondente al punto Q di σ ove l'analogo vettore è $\mathbf{n}$.

3. Il problema di Dirichlet nel campo S'. — Si tratta di determinare una funzione

$$V = V(P')$$

dei punti P′ di S′ regolare ed armonica e che sulla superficie σ' assume valori prefissati $V(Q')$.

Cominciamo col determinare in S una funzione armonica e regolare $V_0(P)$ che, in un generico punto Q del contorno σ di S, assume il valore che la V deve avere nel corrispondente punto Q′ di σ'; sia cioè

$$(10) \qquad V_0(Q) = V(Q').$$

Poichè si ammette di saper risolvere il problema di Dirichlet nel campo S, si avrà, applicando alla V_0 la formola (3),

$$(11) \qquad V_0(P) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma V_0(Q)\,\frac{dG(P,Q)}{dn_Q}\,d\sigma_Q.$$

Determinata in tal modo la funzione V_0, si costruisca una seconda funzione regolare e armonica in S, $V_1(P)$, e che sopra σ assuma i valori

$$(12) \qquad V_1(Q) = \varepsilon(Q)\,\frac{dV_0}{dn_Q}.$$

Applicando, ancora una volta, la formola (3) alla funzione V_1, si avrà

$$(13) \qquad V_1(P) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \varepsilon(Q)\cdot\frac{dV_0}{dn_Q}\cdot\frac{dG(P,Q)}{dn_Q}\,d\sigma_Q.$$

Consideriamo ora la funzione

$$(14) \qquad V(P) = V_0(P) - V_1(P).$$

Per quanto si è visto, essa è armonica e regolare in S, e, nei punti Q del contorno σ, assume i valori

$$(15) \qquad V(Q) = V_0 - \varepsilon\,\frac{dV_0}{dn_Q}.$$

Ammettiamo che la funzione $V(P)$, definita in S, sia estendibile anche nei punti P′ di S′; ciò ad es. accade di certo se S′ appartiene tutto ad S. Si tratta di vedere, in tale ipotesi, quali valori va ad assumere la funzione V nei punti Q′ della superficie σ' che limita S′.

Per la (2), con la consueta approssimazione, si ha

$$(16) \qquad V(Q') = V(Q + \varepsilon\mathbf{n}) = V(Q) + \varepsilon(Q)\,\frac{dV}{dn_Q}.$$

Sostituiamo in questa, al posto di $V(Q)$, la sua espressione (15), e notiamo come dalla (14), tenute presenti la (12) e la (13), risulta che V è differenza di una parte finita —V_0— e di una parte di primo ordine

— V_1 — ; ne segue che, a meno di quantità di ordine superiore al primo,

$$\varepsilon \frac{dV}{dn_Q} = \varepsilon \frac{dV_0}{dn_Q}.$$

Dopo ciò, la precedente diviene

$$V(Q') = V_0 - \varepsilon \frac{dV_0}{dn_Q} + \varepsilon \frac{dV_0}{dn_Q} = V_0,$$

che è la (10).

Dunque la funzione V, definita dalla (14) e considerata in S', risolve il problema di Dirichlet in questo campo.

Fisica. — *Sulla durata teorica del raggio verde.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una Nota antecedente (Rendic. dell'Accad. dei Lincei, 1° sem. 1916) ho indicato come possano influire sulla durata del raggio verde, e possano spiegare le irregolarità della medesima, le seguenti cause accidentali: 1°) i movimenti e le variazioni di spessore dell'orlo verde-azzurro, prodotto dalla dispersione atmosferica nella parte superiore dell'immagine solare; 2°) se il sole sorge o tramonta dietro la linea dell'orizzonte marino, le possibili piccole variazioni di livello di questa linea, per effetto di onde più o meno estese, spostantisi più o meno rapidamente; 3°) se il sole tramonta dietro una linea di monti, l'inclinazione di questa linea nel punto ove si produce il raggio verde, 4°) le irregolarità della rifrazione atmosferica.

Nella presenta Nota considero l'influenza regolare che la latitudine del luogo d'osservazione e la declinazione solare hanno su tale durata. Siccome questa è uguale al tempo che il sole impiega ad innalzarsi o abbassarsi (a seconda che esso sorge o tramonta) dello spessore dell'orlo verde oltre la linea dell'orizzonte, è chiaro che le due suddette circostanze influiranno su di esso, come influiscono sulla durata dei crepuscoli, e potranno, in taluni casi, farlo crescere in modo notevole.

Siano φ la latitudine; h', δ', θ' l'altezza sull'orizzonte, la declinazione e l'angolo orario, contato dal piano meridiano, del punto più in alto dell'orlo verde dell'immagine del sole, quando esso punto è a contatto colla linea, supposta orizzontale, che limita o copre l'orizzonte (quando dunque, se il sole sorge, incomincia il raggio verde, o quando finisce se il sole tramonta); e siano h'', δ'', θ'' gli stessi dati per lo stesso punto allorchè la sommità della parte bianca abbagliante del disco solare è a contatto colla linea suddetta, e quindi, se il sole sorge, si può considerare come finito il raggio