ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

$-V_1-$; ne segue che, a meno di quantità di ordine superiore al primo,

$$\varepsilon \frac{dV}{dn_Q} = \varepsilon \frac{dV_0}{dn_Q}.$$

Dopo ciò, la precedente diviene

$$V(Q') = V_0 - \varepsilon \frac{dV_0}{dn_Q} + \varepsilon \frac{dV_0}{dn_Q} = V_0,$$

che è la (10).

Dunque la funzione V, definita dalla (14) e considerata in S', risolve il problema di Dirichlet in questo campo.

Fisica. — *Sulla durata teorica del raggio verde.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una Nota antecedente (Rendic. dell'Accad. dei Lincei, 1° sem. 1916) ho indicato come possano influire sulla durata del raggio verde, e possano spiegare le irregolarità della medesima, le seguenti cause accidentali: 1°) i movimenti e le variazioni di spessore dell'orlo verde-azzurro, prodotto dalla dispersione atmosferica nella parte superiore dell'immagine solare; 2°) se il sole sorge o tramonta dietro la linea dell'orizzonte marino, le possibili piccole variazioni di livello di questa linea, per effetto di onde più o meno estese, spostantisi più o meno rapidamente; 3°) se il sole tramonta dietro una linea di monti, l'inclinazione di questa linea nel punto ove si produce il raggio verde, 4°) le irregolarità della rifrazione atmosferica.

Nella presenta Nota considero l'influenza regolare che la latitudine del luogo d'osservazione e la declinazione solare hanno su tale durata. Siccome questa è uguale al tempo che il sole impiega ad innalzarsi o abbassarsi (a seconda che esso sorge o tramonta) dello spessore dell'orlo verde oltre la linea dell'orizzonte, è chiaro che le due suddette circostanze influiranno su di esso, come influiscono sulla durata dei crepuscoli, e potranno, in taluni casi, farlo crescere in modo notevole.

Siano φ la latitudine; h', δ', θ' l'altezza sull'orizzonte, la declinazione e l'angolo orario, contato dal piano meridiano, del punto più in alto dell'orlo verde dell'immagine del sole, quando esso punto è a contatto colla linea, supposta orizzontale, che limita o copre l'orizzonte (quando dunque, se il sole sorge, incomincia il raggio verde, o quando finisce se il sole tramonta); e siano h'', δ'', θ'' gli stessi dati per lo stesso punto allorchè la sommità della parte bianca abbagliante del disco solare è a contatto colla linea suddetta, e quindi, se il sole sorge, si può considerare come finito il raggio verde, mentre questo incomincerebbe se il sole tramontasse. Lo spessore dell'orlo verde (trascurando il piccolissimo spostamento del punto considerato sul contorno del sole) sarà $h'' - h'$; e siccome si ha

$$(1) \qquad \cos\theta' = \frac{\operatorname{sen} h' - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta'}{\cos\varphi \cos\delta'} \qquad \cos\theta'' = \frac{\operatorname{sen} h'' - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta''}{\cos\varphi \cos\delta''},$$

la durata del raggio verde sarà

$$t'' - t' = \frac{\theta'' - \theta'}{15},$$

essendo t'' e t' i valori, espressi in tempo, degli angoli orarî θ'', θ'.

Questa durata, espressa dunque nel caso generale dalla differenza di due archi coseni, si può mettere, nel caso attuale, sotto una forma più semplice, poichè alle quantità piccolissime $\theta'' - \theta'$ e $h'' - h'$ si possono sostituire i differenziali di θ e di h, e si può considerare δ come costante nel brevissimo intervallo da t' a t''. Si ha quindi, differenziando una delle (1) e sopprimendo gli apici,

$$(2) \qquad d\theta = \frac{\cos h \, dh}{\cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen}\theta} =$$

$$= \frac{\cos h \, dh}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2\delta - \operatorname{sen}^2 h + 2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen} h}},$$

e la durata del raggio verde (salvo casi speciali) potrà esser espressa da $dt = d\theta/15$. L'altezza h della linea di monti che suppongo copra l'orrizzonte è sempre molto piccola, spesso anzi nulla, quindi si potrà sempre trascurare $\operatorname{sen}^2 h$ che trovasi aggiunto a $\operatorname{sen} h$ nel denominatore, inoltre se h è nullo o così piccolo che possa essere trascurato rispetto a $1 - \operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2\delta$, si avrà, per la durata del raggio verde,

$$(3) \qquad dt = \frac{dh}{15\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2\delta}}.$$

Ammettendo che lo spessore dell'orlo verde sia di 15″, come risulta da misure dirette, si ha dunque che all'equatore (cioè per $\varphi = 0$) e negli equinozî (cioè per $\delta = 0$) la durata del raggio verde sarà $dt = 15''/15 = 1$ secondo, mentre nei solstizî (cioè per $\delta = 23° \, 27'$) sarà $dt = 1{,}1$ secondo. Invece per una latitudine di 60° (p. es. a Pietroburgo) sarà, nei solstizî,

$$dt = 15/15\sqrt{0{,}09} = 3{,}3 \text{ secondi.}$$

La durata del raggio verde risulta grandissima o infinita quando il denominatore dell'espressione (2) sia piccolissimo o nullo; ma in questi casi non sarebbe valida la formula differenziale. Integrando la (2) fra i limiti

θ' e θ'', h' ed h'', si otterrebbe nuovamente la differenza dei due archi coseni da cui essa venne dedotta differenziando; ma se si trascura $\operatorname{sen}^2 h$, integrando, si ha un'espressione che in taluni casi diviene semplicissima, cioè

$$(4)\quad \theta''-\theta'=\frac{2}{2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta}\Big[\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\delta'+2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h''}-$$
$$-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\delta+2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h'}\,\Big].$$

Qualora fosse $1-\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\delta=0$, ossia $\delta=\pi/2-\varphi$ (ciò che è possibile entro i circoli polari), la (4) si ridurrebbe a

$$\theta''-\theta'=\frac{2(\sqrt{h''}-\sqrt{h'})}{\operatorname{sen}2\varphi}\quad\text{e, per } h'=0,\ \theta''-\theta'=\frac{2\sqrt{h''}}{\sqrt{\operatorname{sen}2\varphi}},$$

essendo, nell'ultima formula, h'' lo spessore dell'orlo verde.

Lo stesso risultato potrebbe essere ottenuto dalle (1) osservando che, per $h=0$, la (2) dà $d\theta/dh=\infty$: ossia il sole si muove orizzontalmente, e quindi trovasi sul meridiano; e θ sarà per tutta la durata del raggio verde nullo o piccolissimo. Sarà dunque con molta approssimazione

$$\cos\theta'=\frac{2\operatorname{sen}h'}{\operatorname{sen}2\varphi}-1\ ,\ \cos^2\theta'=1-\frac{4\operatorname{sen}h'}{\operatorname{sen}2\varphi}\ ,\ \operatorname{sen}\theta'=2\sqrt{\frac{\operatorname{sen}h'}{\operatorname{sen}2\varphi}}\ ;$$

quindi

$$\theta'=2\sqrt{\frac{h'}{\operatorname{sen}2\varphi}}\ ,\ \theta''=2\sqrt{\frac{h''}{\operatorname{sen}2\varphi}}\ ,\ \theta''-\theta'=\frac{2(\sqrt{h''}-\sqrt{h'})}{\sqrt{\operatorname{sen}2\varphi}}\ .$$

[Invece la formula differenziale (2), prendendo per h il valore medio fra 0 e dh darebbe $d\theta=\sqrt{2\,dh}/\sqrt{\operatorname{sen}2\varphi}$, essendo dh lo spessore dell'orlo verde].

Così per $\varphi=70^\circ$ (p. es. presso Hammerfest), qualora durante un raggio verde fosse $\delta=20^\circ$, sarebbe

$$\theta''-\theta'=\frac{2\sqrt{15/200000}}{\sqrt{\operatorname{sen}40^\circ}}=4300''$$

e la durata del raggio verde sarebbe di circa 286 secondi; ed allo Spitzberg, per $\varphi=79^\circ$ e $\delta=11$, essa durata sarebbe di circa 400 secondi. Queste durate si raddoppierebbero qualora (caso eccezionale) non comparisse sopra l'orizzonte che l'orlo verde, dimodochè i due raggi verdi prodotti dal sorgere e dal tramontare del sole si susseguissero senza interruzione. Esse però verrebbero un po' modificate per effetto della variazione della declinazione.

Finalmente, ai poli il sole sorge o tramonta non per effetto della rotazione terrestre ma per il crescere o decrescere della declinazione, e la durata del raggio verde sarà il tempo necessario perchè la declinazione del punto considerato varii di 15″, e sarà circa di un quarto d'ora.

Una ancor maggiore durata del raggio verde potrà (teoricamente) aversi a circa 11 Km. (6′) dai poli, di sera verso l'equinozio di primavera, al mattino verso l'equinozio di autunno, quando cioè il piccolo abbassamento o innalzamento del sole, dovuti alla rotazione terrestre, siano compensati rispettivamente dall'innalzamento o abbassamento dovuti al crescere o decrescere della declinazione solare.

Per effetto della rotazione terrestre e della variazione della declinazione del centro del sole, questo descrive nel cielo, da solstizio a solstizio, un'elica o spirale sferica, avente per asse l'asse terrestre, con spire molto vicine, le quali agli equinozî, quando son più distanti, lo sono di circa 24′, cioè meno del diametro apparente del sole. Ai poli, verso gli equinozî, il sole si innalzerà, con moto uniforme, di circa 1′ per ora; ma a 6′ dal polo, essendo l'asse terrestre e dell'elica suddetta inclinato di 6′ sulla verticale, una delle due mezze spire successive descritte dal sole fra i passaggi opposti al meridiano, sarà in media (perchè la curva non è piana) orizzontale, e l'altra sarà doppiamente inclinata.

Essendo la distanza polare di 6′, e la declinazione del più alto punto del sole apparente — 6′ (e quindi quella del centro del sole vero circa — 1°), le altezze di tal punto, dal passaggio superiore meridiano a quello inferiore, sono

0^h	1^h	2^h	3^h	4^h	5^h	6^h	7^h	8^h	9^h	10^h	11^h	12^h
0	$48''$	$72''$	$74'',5$	$60''$	$33''$	0	$-33''$	$-60''$	$-74'',5$	$-72''$	$-48''$	0

Per una altezza di $\pm 66''$ della linea che copre l'orizzonte vero, si potrebbe osservare un raggio verde della durata di oltre un'ora, da prima delle 2 a dopo le 3, oppure da prima delle 9 a dopo le 10.

La durata del raggio verde, come quella dei crepuscoli, passa per un minimo quando la declinazione del sole varia, da un solstizio all'altro. Sebbene questo minimo non offra interesse pratico, nè per la variazione di durata che esso produce e che è minima, nè per l'epoca nel quale avviene (la quale, come si ricava dalla formula pei crepuscoli, non differisce apprezzabilmente da quella degli equinozî), credo tuttavia utile riferire il calcolo tenendo conto dell'altezza superiore del sole che, nel caso dei crepuscoli, di solito si suppone nulla.

La durata del raggio verde (o del crepuscolo), essendo

$$t'' - t' = (\theta'' - \theta')/15,$$

quale risulta dalle formule (1), essa sarà minima (o massima) quando sia $d(\theta'' - \theta')/d\delta = 0$, ossia $d\theta''/d\delta = d\theta'/d\delta$. Ora dalle (1), differenziando rispetto a δ, che si suppone costante nel brevissimo intervallo di tempo da t' a t'', si ha:

$$\frac{d\theta''}{d\delta}=\frac{\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}h''\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\delta-\operatorname{sen}^2h''+2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h''}}$$

$$\frac{d\theta'}{d\delta}=\frac{\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}h'\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\delta-\operatorname{sen}^2h'+2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h'}}\,.$$

Uguagliando queste due espressioni, ed innalzando al quadrato, si avrà la condizione di minimo, dalla quale si potrà ricavare il corrispondente valore di δ. Il calcolo diviene più breve e più chiaro se tale condizione si pone sotto forma di determinante, cioè

$$\begin{vmatrix}\operatorname{sen}^2\varphi-2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h'+\operatorname{sen}^2h'\operatorname{sen}^2\delta\,, & \cos^2\delta-\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2h'+2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h'\\ \operatorname{sen}^2\varphi-2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h''+\operatorname{sen}^2h''\operatorname{sen}^2\delta\,, & \cos^2\delta-\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2h''+2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h''\end{vmatrix}=0$$

che si può risolvere in una somma di determinanti più semplici: cioè (mettendo in evidenza i fattori comuni)

$$\begin{vmatrix}\operatorname{sen}^2\varphi\,, & \cos^2\delta-\operatorname{sen}^2\varphi\\ \operatorname{sen}^2\varphi\,, & \cos^2\delta-\operatorname{sen}^2\varphi\end{vmatrix}-2\operatorname{sen}^3\varphi\operatorname{sen}\delta\begin{vmatrix}\operatorname{sen}h' & 1\\ \operatorname{sen}h'' & 1\end{vmatrix}+\operatorname{sen}^2\varphi\begin{vmatrix}\operatorname{sen}^2h' & 1\\ \operatorname{sen}^2h'' & 1\end{vmatrix}$$

$$-\,2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta(\cos^2\delta-\operatorname{sen}^2\varphi)\begin{vmatrix}\operatorname{sen}h' & 1\\ \operatorname{sen}h'' & 1\end{vmatrix}-4\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\delta\begin{vmatrix}\operatorname{sen}h' & \operatorname{sen}h'\\ \operatorname{sen}h'' & \operatorname{sen}h''\end{vmatrix}$$

$$-\,2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}h'\operatorname{sen}h''\begin{vmatrix}\operatorname{sen}h' & 1\\ \operatorname{sen}h'' & 1\end{vmatrix}+\operatorname{sen}^2\delta(\cos^2\delta-\operatorname{sen}^2\varphi)\begin{vmatrix}\operatorname{sen}^2h' & 1\\ \operatorname{sen}^2h'' & 1\end{vmatrix}$$

$$+\,2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}^3\delta\operatorname{sen}h'\operatorname{sen}h''\begin{vmatrix}\operatorname{sen}h' & 1\\ \operatorname{sen}h'' & 1\end{vmatrix}-\operatorname{sen}^2\delta\begin{vmatrix}\operatorname{sen}^2h' & \operatorname{sen}^2h'\\ \operatorname{sen}^2h'' & \operatorname{sen}^2h''\end{vmatrix}=0\,,$$

dei quali il primo il quinto ed ultimo sono identicamente nulli, ed il secondo ed in parte il quarto si annullano perchè uguali e di segno contrario. Rimane così, dopo aver diviso per *sen h' sen h''*

$$\cos^2\delta\,[(\operatorname{sen}h'+\operatorname{sen}h'')(\operatorname{sen}^2\delta+\operatorname{sen}^2\varphi)-2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta(\operatorname{sen}h'\operatorname{sen}h''+1)]=0\,,$$

che si scompone in $\cos^2\delta=0$; ed inoltre, ordinando, in

$$(\operatorname{sen}h'+\operatorname{sen}h'')\operatorname{sen}^2\delta-2\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}h'\operatorname{sen}h''+1)\operatorname{sen}\delta+\\+(\operatorname{sen}h'+\operatorname{sen}h'')\operatorname{sen}^2\varphi=0\,,$$

da cui si ricava, come condizione del minimo cercato,

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{1 + \operatorname{sen} h' \operatorname{sen} h'' \pm \sqrt{(1 + \operatorname{sen} h' \operatorname{sen} h'')^2 - (\operatorname{sen} h' + \operatorname{sen} h'')^2}}{\operatorname{sen} h' + \operatorname{sen} h''} \operatorname{sen}\varphi$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} h' \operatorname{sen} h'' \pm \cos h' \cos h''}{\operatorname{sen} h' + \operatorname{sen} h''} \operatorname{sen}\varphi ,$$

e si hanno le due soluzioni

$$(5) \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\delta_1 = \dfrac{1 + \cos(h' - h'')}{\operatorname{sen} h' + \operatorname{sen} h''} \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\cos \cdot (h'' - h')/2}{\operatorname{sen} \cdot (h'' + h')/2} \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\delta_2 = \dfrac{1 - \cos(h'' + h')}{\operatorname{sen} h' + \operatorname{sen} h''} \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\operatorname{sen} \cdot (h'' + h')/2}{\cos \cdot (h'' - h')/2} \operatorname{sen}\varphi . \end{cases}$$

Il primo di questi valori, almeno nel caso che si considera, non è possibile, poichè, essendo h' ed h'' piccoli, potrebbe aversi $\operatorname{sen}\delta > 1$.

Il secondo è quello valido che, per $h'' = 0$, ed $h' = -h$ diviene

$$(6) \qquad \operatorname{sen}\delta_2 = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{tang} h/2 ,$$

la solita formula da cui si ottiene il valore di δ che corrisponde alla minima durata del crepuscolo, astronomico se $h = 18°$, civile se $h = 6°,5$.

Siccome le formule (1) sono simmetriche rispetto a δ e φ che possono essere scambiate (per quanto ciò è possibile, visto che δ non può superare 23° 27′), il calcolo precedente rimane valido se si scambia φ con δ, e la formula (6) diviene

$$\operatorname{sen}\varphi = -\operatorname{sen}\delta \operatorname{tang} h/2$$

che darebbe la latitudine alla quale, per una data declinazione del centro del sole, la durata del crepuscolo è minima: ciò che risulta anche perchè, calcolando la durata d'un crepuscolo colle formule (1), il chiamare δ ciò che era φ e viceversa non cambia in niente il valore finale, purchè nè φ nè δ oltrepassino 23° 27′.

Il calcolo precedente non può valere per luoghi molto vicini al polo dove, come ho accennato, la variazione di h prodotta dalla rotazione terrestre è così piccola che, in proporzione, diviene sensibile o anche preponderante la variazione dello stesso h causata da quella della declinazione solare. In questi casi, nei valori di $d\theta'/d\delta$ e $d\theta''/d\delta$ (che devono essere uguali nel caso di un massimo o un minimo di $\theta'' - \theta'$), bisognerebbe porre rispettivamente i valori δ' e δ'' della declinazione, corrispondenti in tempi t' e t'', tenendo conto della relazione fra t e δ. Lo sviluppo del determinante suddetto non è suscettibile di semplificazioni, e non ho potuto ricavarne alcuna relazione semplice che determini le condizioni nelle quali la durata è massima.

Alle cause suddette, che fanno variare regolarmente la durata del raggio verde, sarebbero da aggiungere l'altezza del luogo di osservazione e quella della linea di monti che copra l'orizzonte. Questa, specialmente, agisce non solo perchè rende maggiore l'altezza alla quale si osserva il raggio verde e quindi rende minori gli effetti della rifrazione e della dispersione, ma agisce anche quando l'altezza angolare di essa linea sia resa minima dalla sua grande distanza. Difatti, per effetto della rifrazione residua, questa linea presenterà un sottilissimo orlo rosso che sovrapponendosi a quello verde dell'immagine solare ne diminuirà lo spessore. Per tale causa, suppongo, la durata del raggio verde (nelle poche mie osservazioni) quando il sole tramontava dietro le Alpi fu brevissima.

Zoologia. — *Osservazioni morfologiche sulla Recurvaria nanella* Hb. (¹). Nota II di Armando Mignone, presentata dal Socio Battista Grassi.

Completiamo la descrizione, data in una precedente Nota (¹), della *Recurvaria nanella* Hb., nello stadio di adulto.

Zampe. Le zampe del 1° paio sono le più corte: un terzo meno lunghe di quelle del 2° paio, e la metà di quelle del 3° paio; le zampe del 2° paio circa un quarto meno lunghe di quelle del 3° paio, che sono le più sviluppate e le più robuste.

Sono interamente rivestite di squame, alcune bianche e alcune nere, disposte nel modo già descritto per le antenne e per i palpi labiali. Così che anche le zampe appaiono formate di tanti anelli bianchi e neri, alternati e immessi l'uno nell'altro.

Le squame sono molto più sviluppate nelle zampe del 3° paio e, in queste, specialmente nella tibia.

L'anca, in tutte e tre le paia di zampe, è notevolmente più corta del femore, di forma globosa, più sviluppata, sembra, nel 2° paio.

Trocantere molto piccolo.

Femore lungo quasi il doppio della tibia nel 1° paio, quanto la tibia nel 2°, metà della tibia nel 3°.

Tibia nel 1° paio molto corta, tozza, portante al terzo distale, ventralmente, uno sperone il quale forma un grazioso apparecchio di pulizia.

Quest'ultimo ha la forma di una doccia, la quale si chiude e termina a punta all'estremità, sensibilmente incurvata, con la convessità opposta alla

(¹) Mignone A., *Osservazioni morfologiche sulla Recurvaria nanella* Hb. Rendic. Accad. Lincei, (5), XXV, 1916, 1° sem., pp. 343-349.