ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 aprile 1916.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle trasformazioni di Ribaucour di una classe di superficie.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Le formule stesse che ho utilizzato in due Note precedenti [1] per trovare le trasformazioni di Ribaucour, per inviluppi di ipersfere, dei sistemi ortogonali di Guichard-Darboux, si adattano, con lievi modificazioni, alle ricerche analoghe per le ordinarie superficie isolate, e più in generale per le ipersuperficie dell' S_n euclideo che siano definite da corrispondenti proprietà delle linee di curvatura.

Cominciando dal caso ordinario, si tratterà qui delle superficie caratterizzate dalla seguente proprietà delle loro linee di curvatura (u_1, u_2): *per una conveniente scelta dei parametri* u_1, u_2, *nella espressione del loro* ds^2

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 ,$$

sussiste fra i coefficienti la relazione

$$H_1^2 \pm H_2^2 = \text{cost}, \tag{a}$$

che corrisponde appunto a quella caratteristica dei sistemi ortogonali di Guichard-Darboux.

[1] Ved. i fascicoli del marzo 1916. La seconda di queste Note verrà qui citata come *Nota* (*B*).

Si sa che appartengono alla classe (a) le superficie a curvatura costante, positiva o negativa, e le loro superficie parallele; ma la classe stessa (a) è molto più ampia, precisamente come la classe delle generali superficie isoterme confrontata con quella delle superficie a curvatura media costante.

Come naturale estensione troveremo nello spazio euclideo S_{n+1} una classe di ipersuperficie V_n *a linee di curvatura coordinate* [1], nella cui espressione del ds^2, riferito alle linee di curvatura $(u_1, u_2, \dots u_n)$,

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \cdots + H_n^2 du_n^2,$$

sussiste fra i coefficienti H_i^2 la relazione analoga alla (a)

$$(a') \qquad \varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 = \text{cost} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1),$$

dove ciascuna ε è l'unità, positiva o negativa.

Fra queste ipersuperficie se ne ha poi una classe, che diremo *speciale*, caratterizzata da ciò: che la stessa relazione (a') ha luogo anche per l'immagine sferica delle linee di curvatura. Queste ipersuperficie V_n speciali tengono nell'S_{n+1} il posto delle superficie a curvatura costante e delle loro parallele del caso $n = 2$, e ne costituiscono la generalizzazione negli iperspazii [2].

Per le nostre ipersuperficie V_n generali esistono trasformazioni di Ribaucour (per inviluppi di ipersfere) che corrispondono esattamente alle trasformazioni D_m di Darboux delle superficie isoterme del caso $n = 2$, e ulteriormente, per la classe *speciale*, alle trasformazioni delle superficie a curvatura costante, che si deducono dalla inversione dei teoremi di Guichard sulle deformate delle quadriche di rotazione.

2. Trattiamo dapprima il caso $n = 2$, e riferiamoci alle formole di rappresentazione sferica, adottando la notazione dei doppî indici, per migliore confronto colle formole del caso generale.

Abbiasi una superficie Σ, riferita alle sue linee di curvatura (u_1, u_2), e sia

$$(1) \qquad ds'^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2$$

il quadrato dell'elemento lineare sferico, mentre con

$$(2) \qquad ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2$$

(1) Cfr. le mie *Lezioni*, vol. I, pag. 481.

(2) È noto che, per $n > 2$, non esistono nell'S_{n+1} ipersuperficie V_n a curvatura riemanniana costante, salvo le ipersfere. Era quindi naturale di avere la generalizzazione delle superficie a curvatura costante in altro senso, e quello indicato nel testo sembra il più opportuno.

indichiamo quello della superficie stessa. Introdotte le *rotazioni*

$$\beta_{12} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u_1}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial u_2},$$

le equazioni caratteristiche per $h_1, h_2, \beta_{12}, \beta_{21}$, sono le seguenti:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial h_1}{\partial u_2} = \beta_{21} h_2 \quad , \quad \frac{\partial h_2}{\partial u_1} = \beta_{12} h_1 \\ &\frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + h_1 h_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Scriviamo anche le equazioni fondamentali cui soddisfano i coseni di di direzione X_1, X_2, X_3 dell'asse Ox rispetto ai tre spigoli del triedro principale:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u_1} = -\beta_{21} X_2 - h_1 X_3 \quad , \quad \frac{\partial X_1}{\partial u_2} = \beta_{12} H_2 \\ &\frac{\partial X_2}{\partial u_1} = \beta_{21} X_1 , \quad \frac{\partial X_2}{\partial u_2} = -\beta_{12} X_1 - h_2 X_2 \\ &\frac{\partial X_3}{\partial u_1} = h_1 X_1 \quad , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u_2} = h_2 X_2 , \end{aligned} \right.$$

che valgono colle analoghe per gli altri due assi. Queste formole (3), (4) sono comuni a tutte le superficie coll'immagine sferica (1) delle linee di curvatura. Una qualunque di queste resta individuata da una coppia di funzioni (H_1, H_2) che soddisfino alle equazioni

$$(5) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21} H_2 \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \beta_{12} H_1 ,$$

dopo di che le formole in termini finiti per Σ si hanno con quadrature:

$$(6) \qquad x = \int (H_1 X_1 du_1 + H_2 X_2 du_2), \text{ ecc.},$$

e il ds^2 è dato appunto dalla (2).

3. Veniamo alla classe particolare di superficie che soddisfano alla condizione (a), ossia

$$(7) \qquad H_1^2 + \varepsilon H_2^2 = \text{cost.} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Dalla derivazione di questa e dalle (5) si ottiene il sistema

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial H_1}{\partial u_1} = -\varepsilon \beta_{12} H_2 \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \beta_{21} H_2 \\ &\frac{\partial H_2}{\partial u_1} = \beta_{12} H_1 \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_2} = -\varepsilon \beta_{21} H_1 , \end{aligned} \right.$$

e, come unica condizione d'integrabilità.

$$\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} = 0 .$$

La ricerca delle superficie della classe (7) dipende quindi, in primo luogo, da quella dei sistemi sferici ortogonali (u_1, u_2) per i quali si verificano le equazioni

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial h_1}{\partial u_2} = \beta_{21} h_2 & , \quad \dfrac{\partial h_2}{\partial u_1} = \beta_{12} h_1 \\ \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + h_1 h_2 = 0 & , \quad \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} + \varepsilon \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} = 0 . \end{array} \right.$$

Applicando i noti teoremi generali, si vede che questo sistema ammette infinite soluzioni, dipendenti da *quattro funzioni arbitrarie* (cfr. n. 7).

Scelta una qualunque di queste soluzioni $(h_1, h_2, \beta_{12}, \beta_{21})$, il sistema *ai differenziali totali* (8) per H_1, H_2 è completamente integrabile. Esso possiede inoltre l'integrale quadratico (7), sicchè possono scegliersi ad arbitrio i valori iniziali di H_1, H_2, per un sistema iniziale di valori di u_1, u_2.

In particolare, quando sia $\varepsilon = -1$, si potrà dare ad arbitrio alla costante del secondo membro nella (7) un valore positivo, negativo o nullo, nel quale ultimo caso la superficie sarà isoterma. Dunque: *le superficie della classe* $H_1^2 - H_2^2 = \text{cost}$ *hanno a comune l'immagine sferica delle linee di curvatura colle superficie isoterme.*

4. Precisiamo meglio il risultato ora ottenuto con una costruzione geometrica effettiva.

Essendo qui $\varepsilon = -1$, indi

$$\frac{\partial \beta_{21}}{\partial u_1} = \frac{\partial \beta_{12}}{\partial u_2} ,$$

possiamo porre, indicando con θ una conveniente funzione di u_1, u_2,

$$\beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \quad , \quad \beta_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial u_2} .$$

Sostituendo nel sistema lineare omogeneo ai differenziali totali (8), si vede che due soluzioni particolari sono

$$H_1 = e^{\theta} \; , \quad H_2 = e^{\theta}$$
$$H_1 = e^{-\theta} \; , \quad H_2 = -e^{-\theta} ,$$

e, per la (6), le corrispondenti superficie, che diremo $S, \overline{S}$, sono date dalle formole

$$\text{S)} \qquad x = \int (e^{\theta} X_1 du_1 + e^{\theta} X_2 du_2)$$

$$\overline{\text{S}}) \qquad \overline{x}^* = \int (e^{-\theta} X_1 du_1 - e^{-\theta} X_2 du_2), \text{ ecc.},$$

che definiscono manifestamente una coppia di superficie isoterme *trasformate di Christoffel*. Ma la soluzione generale delle (8) si compone linearmente colle due particolari, così:

$$H_1 = ae^{\theta} + be^{-\theta} \quad , \quad H_2 = ae^{\theta} - be^{-\theta}$$
$$(a\,.\,b \text{ costanti}),$$

e per le coordinate ξ, η, ζ del punto mobile sulla corrispondente superficie Σ avremo quindi

$$\xi = ax + b\overline{x}^* \quad , \quad \eta = ay + b\overline{y}^* \quad , \quad \zeta = az + b\overline{z}^* \, ,$$

nelle quali formole potremo intendere anche che sia $a + b = 1$, sostituendo ad $S, \overline{S}$ due superficie omotetiche. Dopo ciò, possiamo formulare la costruzione cercata:

Per avere la più generale superficie Σ *con* $H_1^2 - H_2^2 = \text{cost}$, *prendasi una coppia di superficie isoterme* $S, \overline{S}$ *trasformate di Christoffel l'una dell'altra, e si dividano tutti i segmenti* $P\overline{P}$, *che riuniscono le coppie di punti corrispondenti* $P, \overline{P}$, *secondo un rapporto costante; il punto* M *di divisione descrive la superficie domandata.*

Notevole è il caso particolare che $S, \overline{S}$ siano due superficie parallele a curvatura media costante; allora la superficie Σ è una qualunque delle parallele, fra le quali la media è a curvatura costante positiva (Bonnet).

Un altro caso da osservarsi è quello in cui S è una qualunque superficie ad area minima, indi $\overline{S}$ la sfera di Gauss della rappresentazione.

5. Facciamo ora nella (7), $\varepsilon = +1$, indi

$$ds^2 = a^2(\cos^2\omega\, du_1^2 + \operatorname{sen}^2\omega\, du_2^2) \qquad (a \text{ cost}),$$

e ponendo

$$u_1 = \alpha + \beta \quad , \quad u_2 = \alpha - \beta \, ,$$

avremo

$$ds^2 = a^2(d\alpha^2 + 2\cos^2\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2) \, .$$

Le linee (α, β) tracciano sulla superficie una rete di Tchebychef (ved. *Lezioni*, vol. II, pag. 401), di cui le bisettrici sono le linee di curvatura. La proprietà è manifestamente invertibile, e possiamo dire:

Le superficie con $H_1^2 + H_2^2 = \text{cost}$ *sono caratterizzate geometricamente dall'avere, per linee di curvatura, le bisettrici di una rete di Tchebychef.*

Nel caso attuale, con $\varepsilon = +1$, possiamo porre

$$\beta_1 = \frac{\partial \theta}{\partial u_1} \quad , \quad \beta_{21} = -\frac{\partial \theta}{\partial u_2} ,$$

e la soluzione generale delle (8) è

$$H_1 = a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta \quad , \quad H_2 = -a \operatorname{sen}\theta + b \cos\theta ,$$

che si compone linearmente colle due (immaginarie coniugate)

$$\begin{cases} H_1 = e^{i\theta} & , \quad H_2 = i e^{i\theta} \\ H_1 = e^{-i\theta} & , \quad H_3 = -i e^{-i\theta} . \end{cases}$$

A queste ultime corrispondono sempre due superficie isoterme della classe, però questa volta immaginarie, *con immagine sferica reale.* La costruzione formulata al n. 4 rimane ancora valida; solo si osserverà, che per avere una superficie Σ reale, occorre prendere quel rapporto costante complesso, e di modulo $= 1$.

Anche qui le superficie pseudosferiche e le loro parallele formano una classe speciale, nella quale le due superficie isoterme coniugate sono parallele ed hanno per superficie media quella pseudosferica.

In generale, nella classe $H_1^2 \pm H_2^2 = \text{cost}$ le superficie a curvatura costante e le loro parallele sono contraddistinte da ciò: che la medesima relazione $h_1^2 \pm h_2^2 = \text{cost}$ ha luogo per l'immagine sferica.

6. Generalizziamo ora queste ricerche agli iperspazii, e consideriamo nell' S_{n+1} euclideo un' ipersuperficie V_n a linee di curvatura $(u_1, u_2, \ldots u_n)$ coordinate e siano rispettivamente

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \cdots + H_n^2 du_n^2 \tag{10}$$

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + \cdots + h_n^2 du_n^2 \tag{10'}$$

i quadrati degli elementi lineari della V_n e della sua immagine ipersferica.

Alle formole (3) per la rappresentazione sferica vengono ora a sostituirsi le seguenti generali:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} h_k \\ & \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} \qquad\qquad (i \neq k \neq l) \\ & \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + h_i h_k = 0 , \end{aligned} \right.$$

e pei coseni di direzione degli spigoli dell' $(n+1)^{edro}$ principale, che indichiamo con

$$X_1^{(r)}, X_2^{(r)}, \dots X_n^{(r)}; \xi^{(r)} \qquad (r = 0, 1, 2, \dots n),$$

dove con $\xi^{(r)}$ sono indicati quelli della normale all' ipersfera, abbiamo le formole corrispondenti alle (4):

$$(\mathrm{I}^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} X_k \quad , \quad \dfrac{\partial X_i}{\partial u_i} = -\sum\limits_{\lambda}^{(i)} \beta_{\lambda i} X_\lambda - h_i \xi \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u_i} = h_i X_i , \end{cases}$$

avendo omesso, per brevità, l' indice superiore r.

Ogni ipersuperficie V_n colla data immagine ipersferica è individuata dai valori di $H_1, H_2, \dots H_n$ nella (10), valori che debbono soddisfare alle equazioni

$$(11) \qquad \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \qquad (i \neq k).$$

La corrispondente ipersuperficie V_n si ha successivamente con quadrature dalle formole

$$(12) \qquad x_r = \int (H_1 X_1^{(r)} du_1 + H_2 X_2^{(r)} du_2 + \cdots + H_n X_n^{(r)} du_n)$$
$$(r = 0, 1, 2, \dots n).$$

7. Applichiamo queste formole generali della rappresentazione ipersferica alla ricerca di quelle ipersuperficie V_n per le quali fra i coefficienti H_i^2 nella (10) sussiste la relazione

$$(13) \qquad \varepsilon_1 H_1^2 + \varepsilon_2 H_2^2 + \cdots + \varepsilon_n H_n^2 = c \ \text{(costante)}$$
$$(\varepsilon_i = \pm 1).$$

Procedendo come nella Nota (B), da questa avremo, per derivazione,

$$\varepsilon_i \frac{\partial H_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} H_\lambda ;$$

poi, dalle corrispondenti condizioni d' integrabilità, le altre

$$\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda \beta_{i\lambda} \beta_{k\lambda} = 0 .$$

In riguardo dunque alla rappresentazione ipersferica delle ipersuperficie cercata, dovrà sussistere il sistema

$$
\text{(II)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial h_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, h_k \quad , \quad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il}\, \beta_{lk} \\
&\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i}\, \beta_{\lambda k} + h_i\, h_k = 0 \\
&\varepsilon_i \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_i} + \varepsilon_k \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda\, \beta_{i\lambda}\, \beta_{k\lambda} = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Coi soliti procedimenti [cfr. Nota (B)], si riconosce che questo è un sistema completamente integrabile, e la sua soluzione generale $(h_i\,,\beta_{ik})$ dipende da $n(n-1)+n=n^2$ funzioni arbitrarie.

Scelta una soluzione qualunque $(h_i\,,\beta_{ik})$ delle (II), il corrispondente sistema di equazioni ai differenziali totali nelle H_i,

$$
\text{(II*)} \qquad \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_k} = \beta_{ki}\, \mathrm{H}_k \quad , \quad \varepsilon_i \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i,k)} \varepsilon_\lambda\, \beta_{i\lambda}\, \mathrm{H}_\lambda\,,
$$

è a sua volta completamente integrabile, e possiede l'integrale quadratico (13). Esistono dunque le ipersuperficie cercate e dipendono da n^2 funzioni arbitrarie.

Vediamo, poi, che esiste ulteriormente la classe *speciale* in cui la stessa relazione (13) è soddisfatta nella rappresentazione ipersferica

$$
\varepsilon_2\, h_1^2 + \varepsilon_2\, h_2^2 + \cdots + \varepsilon_n\, h_n^2 = \text{cost.}
$$

Poichè, invero, se associamo al sistema (II) le equazioni che ne seguono derivando,

$$
\varepsilon_i \frac{\partial h_i}{\partial u_i} = -\sum_{\lambda}^{(i)} \varepsilon_\lambda\, \beta_{i\lambda}\, h_\lambda\,,
$$

il nuovo sistema è ancora completamente integrabile.

Le ipersuperficie V_n della classe speciale dipendono, così, soltanto da $n(n-1)$ funzioni arbitrarie, e sono geometricamente caratterizzate da questo che: *l'immagine delle loro linee di curvatura costituisce nell'ipersfera un sistema n^{plo} ortogonale di Guichard-Darboux*

8. Passiamo alle trasformazioni di Ribaucour per le ipersuperficie V_n a linee di curvatura coordinate, dapprima in generale. Basterà scrivere le formole relative che si ottengono da quelle della Nota (B), applicando queste ultime al sistema $(n+1)^{plo}$ ortogonale individuato nell' S_{n+1} dalla V_n e dalle sue parallele.

Prendasi un sistema di $2n+3$ funzioni

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n \; ; \; H'_1, H'_2, \dots H'_n \; ; \; w, \varphi, \psi,$$

che soddisfino al seguente sistema differenziale:

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_k} = \beta_{ik} \gamma_k \quad , \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial u_i} = (H_i + H'_i)\, \psi - \sum_\lambda^{(i)} \beta_{\lambda i} \gamma_\lambda - h_i w \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = H_i \gamma_i \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial u_i} = h_i \gamma_i \quad , \quad \frac{\partial \log \psi}{\partial u_i} = \frac{\gamma_i H'_i}{\varphi} \\ & \frac{\partial H'_i}{\partial u_k} = \left\{ \beta_{ki} - (H_i + H'_i) \frac{\gamma_k}{\varphi} \right\} \cdot H'_k , \end{aligned} \right.$$

e, insieme, all'equazione in termini finiti

$$\text{(III*)} \qquad \sum_\lambda \gamma_\lambda^2 + w^2 = 2\varphi\psi .$$

Il sistema (III) è, in effetto, completamente integrabile, e possiede l'integrale quadratico

$$\sum_{1\lambda} \gamma_\lambda^2 + w^2 - 2\varphi\psi = \text{cost},$$

sicchè basta prendere i valori iniziali delle $(\gamma_i, w, \varphi, \psi)$ in guisa che si annulli la costante del secondo membro. Dopo ciò, dalla soluzione scelta $(\gamma_i, H'_i, w, \varphi, \psi)$ resta individuata l'ipersuperficie V'_n, trasformata di Ribaucour della V_n, e corrispondente ai nuovi valori H'_i delle H_i, mediante le formole

$$\text{(14)} \qquad x' = x - \frac{1}{\psi} \left(\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + w\xi \right).$$

Si ha inoltre

$$\text{(15)} \quad \left\{ \begin{aligned} X'_i &= \frac{\gamma_i}{\varphi\psi} \left(\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + w\xi \right) - X_i \\ \xi' &= \frac{w}{\varphi\psi} \left(\sum_\lambda \gamma_\lambda X_\lambda + w\xi \right) - \xi , \end{aligned} \right.$$

e pei nuovi valori dei coefficienti h'_i e delle rotazioni β'_{ik} valgono le formole

$$\text{(16)} \qquad h'_i = h_i - (H_i + H'_i) \frac{w}{\varphi}$$

$$\text{(16*)} \qquad \beta'_{ik} = \beta_{ik} - (H_k + H'_k) \frac{\gamma_i}{\varphi} .$$

9. Applicando queste formole generali, passiamo ora a dimostrare in particolare:

Ogni ipersuperficie V_n *della classe* (13),

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda H_\lambda^2 = c\,,$$

possiede ∞^{2n} *ipersuperficie* V'_n *trasformate di Ribaucour e della medesima classe* $\sum_\lambda \varepsilon_\lambda H'^2_\lambda = c$.

Per questo basta procedere come nella Nota (B), ed aggiungere alle equazioni generali (III) di trasformazione le seguenti:

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda H'^2_\lambda = c \quad , \quad \varepsilon_i \frac{\partial H'_i}{\partial u_i} = -\sum_\lambda^{(i)} \varepsilon_\lambda \beta'_{i\lambda} H'_\lambda\,,$$

le quali ultime provengono dalla prima per derivazione. Si forma così un sistema misto ai differenziali totali che è completamente integrabile, onde la sua soluzione generale contiene $2n+1$ costanti arbitrarie. Ma una di queste, come costante moltiplicativa in $\gamma_i, w, \varphi, \psi$, non ha [secondo la (14)] influenza sull'ipersuperficie V'_n trasformata, e restano pertanto le $2n$ costanti dell'enunciato del teorema.

Il risultato ottenuto vale anche, naturalmente, per le ipersuperficie V_n della classe *speciale*

$$\varepsilon_1 h_1^2 + \varepsilon_2 h_2^2 + \cdots + \varepsilon_n h_n^2 = a \text{ costante}).$$

Ma in questo caso possiamo vedere ulteriormente che: *fra le* ∞^{2n} *ipersuperficie trasformate* V'_n *ne esistono* ∞^{2n-1} *appartenenti alla medesima classe speciale*

$$\varepsilon_1 h'^2_1 + \varepsilon_2 h'^2_2 + \cdots + \varepsilon_n h'^2_n = a\,.$$

E infatti, da

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda h'^2_\lambda = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda h_\lambda^2\,,$$

ossia

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda (h'_\lambda - h_\lambda)(h'_\lambda + h_\lambda) = 0\,,$$

segue, per la (16),

$$\varphi \sum_\lambda \varepsilon_\lambda h_\lambda (H_\lambda + H'_\lambda) - w\left(\sum_\lambda \varepsilon_\lambda H_\lambda H'_\lambda + c\right) = 0 \tag{17}$$

che è una nuova equazione in termini finiti da aggregarsi al sistema. Ora, se si indica con Ω il primo membro della (17), si trova identicamente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = \frac{\gamma_i}{\varphi}(H_i - H'_i)\cdot \Omega\,,$$

onde risulta che le conseguenze differenziali della (17) sono già contenute nel sistema considerato. Il sistema è dunque ancora completo, e il numero delle costanti essenziali nelle soluzioni resta diminuito di un'unità,

c. d. d.

10. Applicati al caso $n=2$, i risultati ottenuti dimostrano che: *ogni superficie della classe* $H_1^2 \pm H_2^2 = \text{cost}$ *ammette* ∞^4 *trasformate di Ribaucour della stessa classe.* In particolare, per le superficie isoterme queste sono le *trasformazioni* D_m di Darboux per inviluppi conformi di sfere. Ma a queste medesime D_m possiamo ricondurre in sostanza le trasformazioni della superficie con $H_1^2 - H_2^2 = \text{cost}$, ricorrendo alla costruzione del n. 4, ed alla nota proprietà della D_m di essere permutabile colla trasformazione C di Christoffel [1]. Una coppia $(S, \overline{S})$ di superficie isoterme trasformate di Christoffel viene cioè cangiata, da una D_m, in un'altra tale coppia $(S', \overline{S}')$. Si prenda una quaderna variabile $(P, \overline{P}, P', \overline{P}')$ di punti corrispondenti sulle quattro superficie e si dividano, secondo il num. 4, i due segmenti $P\overline{P}$, $P'\overline{P}'$ nello stesso rapporto costante k; allora: *I due punti di divisione* M, M' *descrivono due superficie della classe* $H_1^2 - H_2^2 = c$ *legate da una trasformazione di Ribaucour.*

La costruzione vale ancora nel caso delle superficie della classe $H_1^2 + H_2^2 = \text{cost}$, ove però le coppie di superficie isoterme saranno immaginarie coniugate.

Meccanica. — *Sopra due trasformazioni canoniche desunte dal moto parabolico.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

La regolarizzazione (con conservazione della forma canonica) del problema piano dei tre corpi dipende sostanzialmente dalla trasformazione quadratica

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2 \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ne ho fatto uno studio sistematico in più Note recenti [2], nella prima delle quali esprimevo la fiducia di poter assoggettare anche il problema spaziale ad una regolarizzazione altrettanto esauriente. A ciò induce da un lato la considerazione che la permanenza dei tre corpi in uno stesso piano non conferisce alcun carattere specifico al comportamento analitico del sistema nell'immediata prossimità di un urto binario; dall'altro il fatto che (pur con

(1) Ved. il § 3 della mia Memoria: *Ricerche sulle superficie isoterme e sulla deformazione delle quadriche,* Annali di matematica, serie III, tomo XI (1905).

(2) In questi Rendiconti, vol. XXIV (2° sem. 1915), pp. 61-75, 235-248, 421-433, 485-501, 553-569.