ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Analisi metrica delle quasi-asintotiche sulle superficie degli iperspazî*. Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. Sopra una superficie dello spazio ordinario si definisce linea asintotica quella che ha in ogni suo punto per piano osculatore il piano ivi tangente alla superficie: sicchè per definizione l'asintotica e la sezione prodotta dal piano tangente hanno questo per piano osculatore. Tuttavia non si osculano. Il Beltrami ha precisato il comportamento delle due curve nel punto comune dimostrando che il rapporto fra i loro raggi di prima curvatura ivi vale (quando si prendano nell'ordine scritto) 2/3.

La seconda curvatura (torsione) dell'asintotica in un punto è uguale, per un teorema d'Enneper, in valore assoluto, alla radice quadrata della curvatura totale della superficie presa con segno contrario.

Questi due teoremi forniscono le curvature di un'asintotica.

2. Sopra una superficie (a due dimensioni V_2) di un iperspazio S_n ($n>3$) non esistono in generale asintotiche. Si possono invece definire curve (*quasi-asintotiche*) con la proprietà che lo S_{n-1} osculatore ad una di esse sia tangente alla superficie nel punto d'osculazione [1]. Una quasi-asintotica è individuata quando se ne dia un elemento d'ordine $n-3$, E_{n-3} (un punto, la tangente, ... , lo S_{n-3} osculatore); mentre, se si fissa uno S_{n-1} tangente in un punto alla superficie, esistono due quasi-asintotiche uscenti dal punto che lo osculano.

Ciò risulta del resto immediatamente dalla loro equazione differenziale.

3. Indichiamo con $x, y, z_1, \dots, z_{n-2}$ un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di S_n; e poniamo sulla superficie

$$z_1 = z_1(x, y), \dots, z_{n-2} = z_{n-2}(x, y).$$

Assumiamo, sulla curva che si studia, la x come variabile indipendente; bisogna perciò determinare y come funzione di x.

Scriviamo inoltre

$$\frac{\partial^{h+k} z_i}{\partial x^h \partial y^k} = z_i^{(hk)} \quad (i = 1, \dots, n-2) \quad ; \quad y^{(h)} = \frac{d^h y}{dx^h}.$$

L'equazione differenziale delle quasi-asintotiche è

[1] Vedansi le mie Note: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero* [Atti R. Accad. Scienze di Torino, vol. XLVIII (1912-13)], nn. 6, 7; *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazî* [Rend. Circ. matem. di Palermo, tomo XXXVII (1914)]; *Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve* [Rend. R. Istituto Lombardo, ser. II, vol. XLVII (1914)].

$$
(1)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & z_1^{(10)} & \dots & z_{n-2}^{(10)} \\ 0 & 1 & z_1^{(01)} & \dots & z_{n-2}^{(01)} \\ 0 & d^2y & d^2z_1 & \dots & d^2z_{n-2} \\ 0 & d^3y & d^3z_1 & \dots & d^3z_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d^{n-1}y & d^{n-1}z_1 & \dots & d^{n-1}z_{n-2} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & z_1^{(01)} & \dots & z_{n-2}^{(01)} \\ d^2y & d^2z_1 & \dots & d^2z_{n-2} \\ d^3y & d^3z_1 & \dots & d^3z_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d^{n-1}y & d^{n-1}z_1 & \dots & d^{n-1}z_{n-2} \end{vmatrix} = 0,
$$

l'operazione d essendo eseguita sulla curva, cioè

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\, y'.$$

L'equazione è d'ordine $n-2$ in y perchè nei termini dell'ultima riga, i soli contenenti $y^{(n-1)}$, i coefficienti di $y^{(n-1)}$ sono niente altro che i termini corrispondenti della prima riga.

4. Fissiamo ora l'origine delle coordinate nel punto della superficie nel quale vogliamo studiare il comportamento delle quasi-asintotiche; come asse x la tangente ivi alla curva, la prima normale principale come asse y, la seconda come asse $z_1, \dots$, la $(n-1)$-esima come asse z_{n-2}. Ciò porta, per $x=0$, $y=0$,

$$
\begin{aligned}
z_1 = \dots &= z_{n-2} = 0 \\
dy = dz_1 = \dots = dz_{n-3} &= dz_{n-2} = 0 \\
d^2z_1 = \dots = d^2z_{n-3} &= d^2z_{n-2} = 0 \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
d^{n-2}z_{n-3} &= d^{n-2}z_{n-2} = 0 \\
d^{n-1}z_{n-2} &= 0\,;
\end{aligned}
$$

quindi, dalla (1),

$$z_{n-2}^{(01)}(d^2y\, d^3z_1\, d^4z_1 \dots d^{n-1}z_{n-3}) = 0\,.$$

Ma non può annullarsi il fattore chiuso in parentesi se la curva non ha singolarità (S_k a contatto $k+2$-punto) nell'origine; quindi

$$(3)\qquad z_{n-2}^{(01)} = 0\,.$$

Inoltre, essendo

$$\frac{dz_i}{dx} = z_i^{(10)} + z_i^{(01)} y' = 0 ,$$

si ha pure

(4) $$z_1^{(10)} = z_2^{(10)} = \cdots = z_{n-2}^{(10)} = 0 ,$$

e infine, da

$$\frac{d^2 z_{n-2}}{dx^2} = z_{n-2}^{(20)} + 2 z_{n-2}^{(11)} y' + z_{n-2}^{(02)} y'^2 + z_{n-2}^{(01)} y''$$

si ricava, per la (3), nell'origine

(5) $$z_{n-2}^{(20)} = 0 .$$

Altre relazioni si potrebbero trarre dalle (2) fra le derivate delle z_i, ma esse non ci occorrono. Solo importa notare che, in conseguenza di quelle, nessuna di dette derivate si annulla, oltre quelle notate, nell'intorno dell'origine: quindi l'annullarsi di qualche altra derivata va interpretato come proveniente da singolarità della curva o della superficie; ciò che escludiamo.

5. Le equazioni (2) servono a definire pure la sezione iperpiana prodotta da $z_{n-2} = 0$, e tangente alla quasi-asintotica: quindi su questa e sulla sezione sono uguali i valori di $y'', y'', \ldots, y^{(n-2)}$; le due curve hanno in comune *tutti* gli spazî osculatori nel punto.

Se inoltre si tien presente che la curvatura ν-esima è data da [1]

(6) $$\frac{1}{\varrho_\nu^2} = \frac{M_{\nu-1} M_{\nu+1}}{M_1 M_\nu^2} , \qquad M_0 = 1 ,$$

ove

(7) $$M_\nu = \frac{1}{(dx)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}} \left\| \begin{matrix} dx & dy & dz_1 & \ldots & dz_{n-2} \\ d^2x & d^2y & d^2z_1 & \ldots & d^2z_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ d^\nu x & d^\nu y & d^\nu z_1 & \ldots & d^\nu z_{n-2} \end{matrix} \right\|^2 ,$$

si vede che le due curve hanno in comune nell'origine le prime $n-3$ curvature.

6. Cerchiamo ora la $(n-2)$-esima curvatura di ciascuna: bisogna perciò trovare il valore di $y^{(n-1)}$ sulla quasi-asintotica e quello sulla sezione iperpiana che indicheremo con $\overline{y}^{(n-1)}$.

Per la quasi-asintotica si dovrà trarre $y^{(n-1)}$ per derivazione dalla (1); per la sezione dalla $\overline{d}^n z_{n-2} = 0$ (la lineetta sopra il d sta ad indicare che l'operazione è eseguita sulla sezione).

Derivando la (1), si ha

[1] Jordan, Comptes Rendus, tomo 79.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} 1 & z_1^{(01)} & \cdot & \cdot & z_{n-2}^{(01)} \\ d^2y & d^2z_1 & \cdot & \cdot & d^2z_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^{n-2}y & d^{n-2}z_1 & \cdot & \cdot & d^{n-2}z_{n-2} \\ d^{n-1}y & d^{n-1}z_1 & \cdot & \cdot & d^{n-1}z_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & z_1^{(11)} & \cdot & \cdot & z_{n-2}^{(11)} \\ d^2y & d^2z_1 & \cdot & \cdot & d^2z_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^{n-2}y & d^{n-2}z_1 & \cdot & \cdot & d^{n-2}z_{n-2} \\ d^{n-1}y & d^{n-1}z_1 & \cdot & \cdot & d^{n-1}z_{n-2} \end{vmatrix} +$$

$$+\frac{1}{dx}\begin{vmatrix} 1 & z_1^{(01)} & \cdot & \cdot & z_{n-2}^{(01)} \\ d^2y & d^2z_1 & \cdot & \cdot & d^2z_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^{n-2}y & d^{n-2}z_1 & \cdot & \cdot & d^{n-2}z_{n-2} \\ d^{n}y & d^{n}z_1 & & & d^{n}z_{n-2} \end{vmatrix} = 0\,;$$

quindi, nell'origine,

$$z_{n-2}^{(11)}\, d^2y\, d^3z_1 \ldots d^{n-2}z_{n-4}\, d^{n-1}z_{n-3} = d^2y\, d^3z_1 \ldots d^{n-2}z_{n-4}\, d^nz_{n-2}\cdot z_{n-3}^{(01)}/dx\,,$$

ovvero

$$z_{n-2}^{(11)}\frac{d^{n-1}z_{n-3}}{dx^{n-1}} = z_{n-3}^{(01)}\frac{d^nz_{n-2}}{dx^n}. \tag{8}$$

È questa l'equazione che fornisce $y^{(n-1)}$ sulla quasi-asintotica [y^n non figura, come apparirebbe, a secondo membro, perchè si è dimostrato (3) essere $z_{n-2}^{(01)}=0$]. In $\frac{d^{n-1}z_{n-3}}{dx^{n-1}}$ comparisce $y^{(n-1)}$ nel termine $z_{n-3}^{(01)}\,y^{(n-1)}$; in $\frac{d^nz_{n-2}}{dx^n}$ nel termine $n z_{n-2}^{(11)}\,y^{(n-1)}$.

Invece $\bar{y}^{(n-1)}$ sulla sezione iperpiana si ha dall'equazione

$$\frac{\bar{d}^nz_{n-2}}{dx^n}=0\,; \tag{9}$$

$\bar{y}^{(n-1)}$ vi figura nel termine $n z_{n-2}^{(11)}\,\bar{y}^{(n-1)}$.

Anzi $\frac{d^nz_{n-2}}{dx^n}$ e $\frac{\bar{d}^nz_{n-2}}{dx^n}$ non differiscono che per i termini detti, essendo la loro formazione la stessa ed avendo $y'', \ldots, y^{(n-2)}$ gli stessi valori sulle due curve. Quindi, sottraendo la (9) dalla (8), si ha, sopprimendo il fattore comune $z_{n-2}^{(11)}$ non nullo (n. 4, in fine),

$$\frac{d^{n-1}z_{n-3}}{dx^{n-1}} = n z_{n-3}^{(01)}\big(y^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}\big)\,.$$

Formiamoci analogamente $\frac{\bar{d}^{n-1}z_{n-3}}{dx^{n-1}}$ sulla sezione. Questa espressione non differisce dalla precedente che per avere $z_{n-3}^{(01)}\,\overline{y}^{(n-1)}$ in luogo di $z_{n-3}^{(01)}\,y^{(n-1)}$; quindi

$$\frac{d^{n-1}\overline{z}_{n-3}}{dx^{n-1}}=\frac{d^{n-1}z_{n-3}}{dx^{n-1}}-z_{n-3}^{(01)}\,y^{(n-1)}+z_{n-3}^{(01)}\,\overline{y}^{(n-1)}$$
$$=(n-1)\,z_{n-3}^{(01)}(y^{(n-1)}-\overline{y}^{(n-1)})\,.$$

Il rapporto dei raggi di $(n-2)$-esima curvatura delle due curve vale, secondo le (6) e (7),

$$\frac{\varrho_{n-2}}{\overline{\varrho}_{n-2}}=\frac{d^{n-1}\overline{z}_{n-3}}{d^{n-1}z_{n-3}}=\frac{n-1}{n}\,.$$

Una quasi-asintotica e la sezione iperpiana prodotta dal suo S_{n-1} *osculatore* (*nel punto e secondo il ramo tangente alla quasi-asintotica*) *hanno in comune tutti gli spazi osculatori e le prime* $n-3$ *curvature. Le* $(n-2)$*-esime curvature stanno fra loro nel rapporto* $(n-1)/n$.

È questa l'estensione cercata del teorema di Beltrami alle quasi-asintotiche. La dimostrazione qui data presuppone $n>3$ perchè z_{n-3} e z_{n-2} debbono esistere; quindi non potrebbe applicarsi allo spazio ordinario.

Meccanica. — *Sull'equilibrio elastico di un solido omogeneo isotropo limitato da una superficie piana.* Nota della dott.ssa ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Indichiamo con $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ tre funzioni, e vediamo di determinarle in modo che verifichino in ogni punto del semispazio, limitato dal piano di equazione $z=0$ che contiene la direzione positiva dell'asse z, le tre equazioni simultanee dell'equilibrio elastico, quando non agiscono forze di massa (caso al quale ci si può sempre ridurre),

$$(1)\qquad \begin{cases}(\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\mathrm{L}\Delta^2u=0\\[2mm](\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\mathrm{L}\Delta^2v=0\qquad \theta=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\,,\\[2mm](\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta}{\partial z}+\mathrm{L}\Delta^2w=0\end{cases}$$

e in ogni punto del piano limite le altre

$$(1')\qquad \begin{cases}u(x,y,0)=\mathrm{U}(x,y)\\ v(x,y,0)=\mathrm{V}(x,y)\\ w(x,y,0)=\mathrm{W}(x,y)\,,\end{cases}$$