ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

non differisce dalla precedente che per avere $z^{(01)}_{n-3}\,\overline{y}^{(n-1)}$ in luogo di $z^{(01)}_{n-3}\,y^{(n-1)}$; quindi

$$\frac{\overline{d^{n-1}z}_{n-3}}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}z_{n-3}}{dx^{n-1}} - z^{(01)}_{n-3}\,y^{(n-1)} + z^{(01)}_{n-3}\,\overline{y}^{(n-1)}$$

$$= (n-1)\,z^{(01)}_{n-3}(y^{(n-1)} - \overline{y}^{(n-1)}) .$$

Il rapporto dei raggi di $(n-2)$-esima curvatura delle due curve vale, secondo le (6) e (7),

$$\frac{\varrho_{n-2}}{\overline{\varrho}_{n-2}} = \frac{\overline{d^{n-1}z}_{n-3}}{d^{n-1}z_{n-3}} = \frac{n-1}{n} .$$

Una quasi-asintotica e la sezione iperpiana prodotta dal suo S_{n-1} *osculatore (nel punto e secondo il ramo tangente alla quasi-asintotica) hanno in comune tutti gli spazi osculatori e le prime* $n-3$ *curvature. Le* $(n-2)$*-esime curvature stanno fra loro nel rapporto* $(n-1)/n$.

È questa l'estensione cercata del teorema di Beltrami alle quasi-asintotiche. La dimostrazione qui data presuppone $n > 3$ perchè z_{n-3} e z_{n-2} debbono esistere; quindi non potrebbe applicarsi allo spazio ordinario.

Meccanica. — *Sull'equilibrio elastico di un solido omogeneo isotropo limitato da una superficie piana.* Nota della dott.ssa ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Indichiamo con $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ tre funzioni, e vediamo di determinarle in modo che verifichino in ogni punto del semi-spazio, limitato dal piano di equazione $z=0$ che contiene la direzione positiva dell'asse z, le tre equazioni simultanee dell'equilibrio elastico, quando non agiscono forze di massa (caso al quale ci si può sempre ridurre),

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{L}+\mathrm{K})\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mathrm{L}\Delta^2 u = 0\\ &(\mathrm{L}+\mathrm{K})\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mathrm{L}\Delta^2 v = 0 \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},\\ &(\mathrm{L}+\mathrm{K})\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mathrm{L}\Delta^2 w = 0\end{aligned}\right.$$

e in ogni punto del piano limite le altre

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} u(x,y,0) &= \mathrm{U}(x,y)\\ v(x,y,0) &= \mathrm{V}(x,y)\\ w(x,y,0) &= \mathrm{W}(x,y),\end{aligned}\right.$$

dove $U(x, y)$, $V(x, y)$, $W(x, y)$ rappresentino funzioni *date ad arbitrio* in modo da assicurare la convergenza degli integrali di Fourier che ci converrà adoperare.

Poniamo

$$(2)\quad \begin{cases} u(x, y, z) = \displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta (A + i\alpha H z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ v(x, y, z) = \displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta (B + i\beta H z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ w(x, y, z) = \displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta (C + i\gamma H z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \end{cases}$$

e stabiliamo che sia

$$\gamma = \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

e che le funzioni $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$, (α, β), da determinarsi, siano legate dalla relazione

$$\gamma H = -\frac{K + L}{K + 3L}(\alpha A + \beta B + \gamma C).$$

Allora possiamo assicurarci che le grandezze (2) verificano le equazioni (1), supponendo, naturalmente, che le funzioni $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$, $H(\alpha, \beta)$ vengano determinate in modo da permettere le relative derivazioni. È facile vedere così, che $\Delta^2 u$, $\Delta^2 v$, $\Delta^2 w$, ricavate dalle equazioni (2), valgono, prescindendo dall'operazione $\iint_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta$,

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x, y, z) = -2\alpha\gamma H(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ \Delta^2 v(x, y, z) = -2\beta\gamma H(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \\ \Delta^2 w(x, y, z) = -2\gamma^2 H(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \end{cases}$$

Ma θ vale evidentemente

$$\theta = i(\alpha A + \beta B + \gamma C + \gamma H)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$\theta = i\left[\frac{K + 3L}{K + L}\gamma H + \gamma H\right] e^{i(\alpha x + \beta g + \gamma z)}$$

$$\theta = -2i\frac{L}{L + K}\gamma H\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}:$$

dunque le (1) risultano subito verificate.

Bisogna ora determinare $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$ in modo che gli integrali e le derivate abbiano realmente significato e che siano soddisfatte le condizioni (1'). Se assumiamo

$$(3) \qquad \begin{cases} A(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta \\ B(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} V(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta \\ C(\alpha, \beta) = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\iint_{-\infty}^{+\infty} W(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta\,, \end{cases}$$

pur valendo, per U, V, W, le ipotesi poco restrittive che assicurano la validità della formula di Fourier, noi vediamo subito che anche le condizioni (1') risultano verificate.

Matematica. — *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici*. Nota II [1] di Umberto Cisotti, presentata dal Socio T. Levi Civita.

4. Una formola preliminare. — Richiamiamo la formola (9)

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{v} + (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, \mathbf{n}\,.$$

Sia $\varphi(P)$ una funzione generica; moltiplicando scalarmente la precedente per grad φ e notando che

$$[\operatorname{grad} \varphi(Q)] \times \mathbf{n}' = \frac{d\varphi(Q)}{dn'}\,, \quad [\operatorname{grad} \varphi(Q)] \times \mathbf{n} = \frac{d\varphi(Q)}{dn}\,,$$

si ottiene

$$(17) \qquad \frac{d\varphi(Q)}{dn'} = \frac{d\varphi(Q)}{dn} - \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \varphi(Q) + (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, \frac{d\varphi(Q)}{dn}\,.$$

D'altra parte, applicando alla funzione $\dfrac{d\varphi(Q)}{dn}$ la formola (16), si ha

$$\frac{d\varphi(Q')}{dn'} = \frac{d\varphi(Q)}{dn'} + \varepsilon(Q)\, \frac{d}{dn_Q}\, \frac{d\varphi(Q)}{dn'}\,;$$

per cui, sostituendo al primo termine del secondo membro di questa la sua espressione (17), si ha in definitiva, con la solita approssimazione,

$$(18) \qquad \frac{d\varphi(Q')}{dn'} = \frac{d\varphi(Q)}{dn} - \mathbf{v} \times \operatorname{grad} \varphi(Q) + (\mathbf{n} \times \mathbf{v})\, \frac{d\varphi(Q)}{dn} + \varepsilon\, \frac{d^2\varphi(Q)}{dn^2}\,,$$

formola che sfrutteremo tra poco.

[1] Vedi la Nota I, questi Rendiconti, vol. XXV, pag. 413.