ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 aprile 1916.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica — *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* Nota II del Corrispondente FRANCESCO SEVERI [1].

4. ESTENSIONE DEL TEOREMA FONDAMENTALE ALLE VARIETÀ. — Il teorema ottenuto pei sistemi continui di curve d'una superficie, si può estendere ai sistemi continui di superficie d'una varietà a 3 dimensioni, o, più in generale, ai sistemi continui di varietà a $k-1$ dimensioni, entro una varietà a k dimensioni.

Riferiamoci per brevità ad una varietà V a 3 dimensioni. Qualora, per la dimostrazione del teorema suddetto, si volesse usufruire della proiezione di V sopra uno spazio multiplo, occorrerebbe un esame un po' più minuto di quello già esposto nei numeri precedenti, a causa dei punti tripli che presenta la superficie F proiezione d'una superficie di V, e sopratutto dei punti cuspidali di F, i quali cadon tutti sulla superficie di diramazione dello spazio multiplo. In verità la presenza di codesti punti singolari non altererebbe le linee essenziali del procedimento; ma costringerebbe a qualche lungaggine nel discorso.

Preferisco perciò di esporre, per le varietà a 3 dimensioni, una dimostrazione che muove dagli stessi concetti espressi nella mia Nota già citata dei Rendiconti di Palermo, 1905. Si vedrà come questa dimostrazione

(1) Ved. la Nota I a pag. 459 di questi Rendiconti (1916, fasc. 7°).

valga, con soli adattamenti del linguaggio, per le superficie e per le varietà superiori.

Consideriamo sulla V, priva di punti multipli in uno spazio S_r, una superficie irriducibile e priva di punti multipli F, la quale sia atta a definire un sistema continuo almeno ∞^1.

Il sistema $|E|$ staccato su V dalle forme di S_r, d'ordine l non minore dell'ordine m di F, contiene parzialmente ogni superficie d'ordine m tracciata su V; e, crescendo, se occorre, l, si può esiger pure che $|E|$ segni su F un sistema lineare completo ([1]). Aggiungeremo, per quanto non sia strettamente necessario pel seguito, che il sistema $|D|$, residuo di F rispetto ad $|E|$, ed il sistema $|C|$, segato da $|D|$ su F, possono inoltre supporsi irriducibili e privi di punti base; cosicchè la generica superficie D e la generica curva C sono irriducibili e prive di punti multipli.

Le superficie E, passanti per C, costituiscono un sistema lineare H, ∞^α, e tagliano altrove su F il sistema caratteristico completo. Quelle, E_0, tra esse, che sono infinitamente vicine alla superficie composta $F + D$, hanno una linea doppia infinitamente vicina a C, e sono quindi spezzate in una parte infinitamente vicina ad F ed in una infinitamente vicina a D (tutto ciò si deduce dalle proprietà analoghe delle curve di una superficie, segando con un iperpiano).

Consideriamo ora il più ampio sistema algebrico connesso M, contenente F; e indichiamo con T il sistema connesso costituito dalle superficie E spezzate ciascuna in una superficie di M ed in una superficie dell'ordine di D. A quest'ultimo sistema appartengono intanto le superficie E_0; e viceversa ogni E di T, infinitamente vicina ad $F + D$, avendo una linea doppia infinitamente vicina a C, passa per C ed è quindi una E_0. Nello « spazio » lineare i cui « punti » son le superficie E, la varietà « tangente » a T, nel punto $F + D$, è dunque costituita dai punti E passanti per C. Si conclude intanto che nell'intorno di $F + D$ la varietà T ha la dimensione α e che in $F + D$ essa possiede, per varietà tangente, lo « spazio » lineare H.

Sieno

(8) $f(x_1, x_2, \ldots, x_r; t) = 0$, (9) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r; \tau) = 0$

($x_1, x_2, \ldots, x_r$ coordinate di punto in S_r; t, τ parametri) le equazioni di due superficie rispettivamente variabili in due « rami » appartenenti a T, e uscenti da $F + D$.

È lecito di rappresentare in tal modo i due rami, perchè ogni superficie di T, essendo intersezione completa di V con una forma, può appunto

[1] È questo un noto teorema di Castelnuovo. Il teorema analogo, occorrente per le varietà superiori, trovasi nel n. 2 della mia Memoria: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1909).

rappresentarsi con una sola equazione (da aggiungersi beninteso alle equazioni di V). Si concluderà allora, esattamente come alla fine del n. 2, che, fissata una legge di variazione

$$t = \varepsilon^i \vartheta(\varepsilon) \quad , \quad \tau = \varepsilon^j \eta(\varepsilon).$$

di due superficie E_1, E_2 rispettivamente mobili sui due rami e tendenti insieme ad $F + D$, il fascio di superficie individuato da esse entro $|E|$ ha per limite il fascio

$$b\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0 + k\beta\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial^\sigma \tau}\right)_0 + \mu f(x_1, x_2, \ldots, x_r; 0) = 0\,, \tag{10}$$

ove $f(x_1, x_2, \ldots, x_r; 0) = 0$ è l'equazione di $F + D$.

A questo punto si osservi che la curva C è limite di una curva $\overline{C}$ *dello stesso ordine* comune alle due componenti di una E_1 (o di una E_2), che tenda ad $F + D$, e che la forma variabile (8) [o (9)], che stacca su V la E_1 (o la E_2), o tocca V lungo $\overline{C}$ od ha in $\overline{C}$ una linea doppia variabile. In ogni caso il luogo di $\overline{C}$ fa parte dell'inviluppo del sistema (8) [o (9)], e quindi nei punti di C si annullano le $\left(\frac{\partial^s f}{\partial t^s}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^\sigma \varphi}{\partial \tau^\sigma}\right)_0$. Da ciò segue che il fascio (10) è costituito da elementi dello « spazio » lineare H. Ne deriva, come al n. 2, che T passa per $F + D$ con una sola falda semplice, e quindi che M passa anch'esso per F con una sola falda semplice. Resta così provato che F appartiene ad un sol sistema irriducibile completo Σ di superficie dello stesso ordine, e che Σ taglia su F il sistema caratteristico completo.

L'estensione degli sviluppi del n. 3 non offre altre difficoltà sostanziali: basta soltanto, se F possiede punti multipli, sostituire al sistema $|E|$, di cui sopra, quello segato su V dalle forme d'ordine abbastanza alto aggiunte ad F. Si perviene in tal modo alla conclusione generale:

Entro una varietà algebrica irriducibile V_k, ogni varietà a $k-1$ dimensioni, irriducibile o no, sulla quale sieno assegnate le varietà base e le varietà multiple variabili, individua un sistema irriducibile completo, che la contiene totalmente.

5. Le curve algebriche spezzate, ma connesse, come forme limiti delle curve irriducibili. Questioni di realità. — Il teorema fondamentale dei nn. 2 e 3 spiana la via per lo studio di molte notevoli questioni, ad alcune delle quali mi propongo di accennare in questo e nel numero successivo.

In una mia Nota riassuntiva *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann* (1), ho enunciato la propo-

(1) Questi Rendiconti, maggio 1915, pag. 886.

sizione seguente, della quale, in quel lavoro preliminare, mi son limitato a indicare a grandi tratti la dimostrazione, fermandomi sopratutto su alcuni casi particolari, che mi interessavano fra l'altro per la dimostrazione geometrica del teorema d'esistenza:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva piana spezzata C, *d'ordine* m, *possa considerarsi come limite d'una curva irriducibile d'ordine* m *e genere* π, *è che sia possibile scegliere alcuni nodi di* C, *in tal numero ed in tal posizione che, considerandoli come inesistenti, si ottenga da* C *una curva connessa di genere virtuale* π.

Qui mostrerò come questa proposizione segua, in modo molto semplice, dal teorema fondamentale del presente lavoro.

Sieno $C_1, C_2, \ldots, C_l$ le componenti irriducibili di C; e supponiamo, per semplicità, che la curva complessiva sia dotata di soli nodi, in numero di δ, provenienti in parte dai nodi delle componenti ed in parte dalle intersezioni di queste a due a due. Diciamo m_h, π_h l'ordine ed il genere effettivo di C_h; δ_h il numero de' suoi nodi che si assegnan come nodi di C; i_h invece il numero dei nodi di C_h che si considerano per C come inesistenti; e infine j il numero delle intersezioni delle componenti, che si consideran pure come nodi inesistenti (punti di connessione) di C. Denoteremo con J il gruppo complessivo di queste j intersezioni.

Si hanno intanto le relazioni

$$m = \Sigma m_h\,, \quad \pi = \Sigma \pi_h + \Sigma i_h + j - l + 1\,, \quad \delta = \Sigma \delta_h + \Sigma m_h m_k + \Sigma i_h\,,$$

ove π è il genere virtuale di C coi $\delta - j - \Sigma i_h$ nodi assegnati.

Un facile calcolo mostra che la dimensione ϱ del sistema lineare delle curve di ordine m passanti pei nodi assegnati di C [cioè (nn. 2 e 3) la dimensione del sistema irriducibile completo Σ individuato da C con quei tali gruppi di nodi variabili e di nodi inesistenti] soddisfa alla disuguaglianza

$$\varrho \geq 3m + \pi - 1\,, \tag{11}$$

dove vale il segno $=$ o $>$, secondo che le condizioni imposte alle suddette curve d'ordine m sono o no indipendenti.

Dico che la curva generica di Σ è irriducibile. Siccome la cosa è vera per $l = 1$, basterà, ammessala vera pel sistema continuo individuato da una curva connessa, composta da $l - 1$ parti, dimostrarla pel sistema Σ. Si osservi perciò, in primo luogo, che è sempre possibile trovare $l - 1$, e sieno $C_1, C_2, \ldots, C_{l-1}$, componenti di C, tali che, considerando come inesistenti quei nodi di $\Gamma = C_1 + C_2 + \cdots + C_{l-1}$ che son compresi fra i $\Sigma i_h + j$ nodi di C, già fissati come inesistenti, si ottenga una curva connessa. Si parta infatti da C_1: esisterà allora qualche componente di C, e sia C_2, connessa con C_1 attraverso ad una almeno delle intersezioni J. Similmente dovrà esistere qualcuna delle ulteriori componenti C, e sia C_3, connessa con $C_1 + C_2$ attraverso ad una almeno delle restanti intersezioni J; e così proseguendo. (Si noti che con ciò resta pur provato che $j \geq l - 1$).

Ciò posto, il sistema Σ', individuato da Γ, ha la curva generica irriducibile, ed al sistema Σ appartiene il sistema S delle curve ottenute aggiungendo ad una generica curva di Σ' una generica curva del sistema Σ'', individuato da C_l coi suoi i_l nodi inesistenti. Sicchè, se la curva generica di Σ è riducibile, essa non può che spezzarsi in una curva dell'ordine di Γ ed in una dell'ordine di C_l: e mentre la curva generica descrive Σ, che è completo, le sue componenti descrivono rispettivamente i sistemi completi Σ', Σ''. Laonde il sistema Σ coincide addirittura con S e, dette ϱ', ϱ'' le dimensioni di Σ', Σ'', si ha pertanto

$$\varrho = \varrho' + \varrho''. \tag{12}$$

Ora la curva Γ coi suoi $\sum_{h=1}^{l-1} i_h + j - j'$ nodi inesistenti, ove j' ($j > j' \geq 1$) è il numero delle intersezioni J comuni a C_l e a Γ, ha il genere

$$\pi' = \sum_{h=1}^{l-1} \pi_h + \sum_{h=1}^{l-1} i_h + j - j' - l + 2 = \pi - \pi_l - i_l - j' + 1,$$

e quindi il genere effettivo della generica $\bar{\Gamma}$ di Σ' non supera π' (lo eguaglia solo se, come risulterà *a posteriori*, ogni nodo virtualmente inesistente di Γ è effettivamente inesistente per $\bar{\Gamma}$).

Si ha perciò [1]

$$\varrho' \leq 3(m - m_l) + \pi - \pi_l - i_l - j';$$

e similmente, poichè la curva generica di Σ'' ha il genere virtuale $\pi_l + i_l$, viene

$$\varrho'' \leq 3m_l + \pi_l + i_l - 1$$

e quindi

$$\varrho' + \varrho'' \leq 3m + \pi - 1 - j',$$

la quale, confrontata con la (11), ricordando che $j' \geq 1$, porge $\varrho > \varrho' + \varrho''$, contrariamente alla (12).

[1] Qui si applica la proposizione che una curva piana irriducibile d'ordine n e genere effettivo p, appartiene ad un sistema irriducibile di curve analoghe, di dimensione $3n + p - 1$ (cfr. ad es. col n. 2 della mia Nota del maggio 1915). La cosa segue subito, del resto, dalla completezza della serie caratteristica del sistema.

È dunque assurdo ammettere che la curva generica di Σ sia spezzata. Risulta inoltre che la curva generica di Σ ha proprio il genere effettivo π e non $\overline{\pi} < \pi$, che cioè essa possiede esattamente tanti nodi (e non di più) quanti son quelli che si assegnarono come variabili su C per definire il sistema Σ, perchè in caso contrario la dimensione di Σ risulterebbe eguale a $3m + \overline{\pi} - 1$, contrariamente alla (11).

La sufficienza della condizione enunciata resta così stabilita. Quanto alla necessità, è una conseguenza ovvia dell'osservazione che una curva connessa non può aver come limite una curva sconnessa.

Si noterà di più che nella (11) deve valere il segno $=$, e quindi che i punti doppii assegnati di C impongono condizioni indipendenti alle aggiunte d'ordine m, d'accordo con un noto teorema di Noether (¹).

Osservazione. — Se la curva C è reale, cioè se ha un'equazione a coefficienti reali, i suoi nodi imaginarî sono a due a due complessi coniugati; e, qualora i nodi che si assegnano su essa si scelgano appunto reali o a due a due complessi-coniugati, le curve d'ordine m aggiunte a C risultan tutte reali. Sicchè il sistema Σ ∞^ρ, definito in corrispondenza a quella scelta dei nodi variabili, avendo nel « punto » C uno « spazio tangente » S_ρ reale, passerà per C almeno con una « falda » reale ∞^ρ. Si badi però che la C potrà anche essere un « punto multiplo » per Σ, in quanto può darsi che da C sia possibile ottenere qualche altra curva di Σ, cambiando il gruppo dei nodi di C assegnati come variabili. Comunque sia, si può dire che:

Se una curva reale C *di ordine* m, *spezzata in più parti, si può render connessa e di genere virtuale* π, *fissando la connessione attraverso a certi suoi nodi reali o a due a due complessi coniugati, esistono* $\infty^{3m+\pi-2}$ *curve reali irriducibili d'ordine* m *e genere* π, *ad essa infinitamente vicine, ciascuna delle quali ha un punto doppio infinitamente prossimo ad ognuno di quei nodi di* C *che non si scelsero come punti di connessione.*

Questo teorema offre un larghissimo campo di applicazione nelle questioni di realità delle curve algebriche piane, e dà una base generale al metodo così detto della « piccola variazione ». Così possono da esso ottenersi come facili corollari il teorema di Harnack e molti dei bei risultati di Hilbert sui rami reali delle curve algebriche.

Spero di poter in seguito occuparmi di questo genere di applicazioni.

6. Applicazione del teorema fondamentale alla teoria delle curve algebriche sghembe. Cenni di ulteriori sviluppi. — Sia V una famiglia di curve algebriche sghembe C, di ordine n, genere p, prive di punti multipli (²).

(¹) *Ueber die reductiblen algebraischen Curven* (Acta math. 8, 1886), pag. 172.

(²) Ved. ad es. il n. 1 della mia Nota citata, *Sulla classificazione delle curve algebriche*, ecc.

La formola di postulazione, che esprime il numero delle condizioni lineari indipendenti offerte alle superficie d'ordine l abbastanza grande, imponendo loro di passar doppiamente per una data C, è del tipo $k_0 l + k_1$, ove k_0, k_1 sono numeri caratteristici di C. Se la C considerata, pur essendo particolare entro V, non ha punti multipli, k_0, k_1 dipendono soltanto da n e da p (¹), e quindi la dimensione r del sistema lineare S delle superficie F d'ordine l, che passano doppiamente per una curva C variabile in V, non s'altera finchè C non acquista qualche nuovo punto multiplo.

Inoltre, sempre nell'ipotesi che l sia abbastanza grande, una F generica, passante doppiamente per C, è irriducibile, e fuori di C non ha punti multipli. Ciò risulta subito dall'osservare che le superficie d'ordine l', abbastanza alto, passanti semplicemente per C, formano un sistema lineare di dimensione > 1, che non ha punti base fuori di C: sicchè il sistema lineare doppio di questo risulta formato da superficie irriducibili d'ordine $l = 2l'$, passanti doppiamente per C e non aventi punti base fuori di C.

Premesso questo, consideriamo il sistema irriducibile completo Σ_0 *individuato* (n. 4) da una F_0 generica passante doppiamente per una data C_0 di V, priva di punti multipli, e definito dalla condizione che la superficie F, mobile in Σ_0, abbia una linea doppia variabile d'ordine n, la quale si riduca a C_0 quando F va in F_0. Al variare di F in Σ_0, la sua linea doppia descrive una varietà irriducibile, che abbraccia tutta la famiglia V; e, poichè V è completa, si può affermare che le linee doppie delle superficie di Σ_0, son tutte e sole le curve di V, e quindi che Σ_0 può descriversi tutto facendo variare una C di V e insieme il sistema lineare completo S, individuato da quella C. Non si esclude con ciò che, per qualche particolare posizione di C entro V, il sistema delle superficie d'ordine l, aventi la linea doppia C, si amplii; ma ciò accadrà soltanto allorquando la C acquisti punti multipli o, in particolare, si spezzi (²).

Se pertanto la C_0, da cui partimmo, appartenesse ad un'altra famiglia V' di curve C', prive di punti multipli, di ordine n e genere p, il sistema lineare S', ancora *di dimensione* r, costituito dalle superficie d'ordine l passanti doppiamente per la C' variabile in V', descriverebbe un sistema algebrico irriducibile Σ', non contenuto in Σ, e contenente invece *tutto* il sistema lineare S, di dimensione r, definito da C_0. Sicchè la F_0 apparter-

(¹) Si trova infatti agevolmente che la formola di postulazione di C per le superficie d'ordine alto l, che la debbono contenere come doppia, è $3nl - 4n - 5p + 5$. Del resto questa formola può ricavarsi anche dalla Memoria di Noether, *Sulle curve multiple di superficie algebriche* [Annali di matematica, (2), tomo V, 1871].

(²) Avvertiamo, poichè ne capita l'occasione, che l'ampliamento del sistema S in corrispondenza ad una particolare C_1, dotata di punti multipli, può avvenire senza che il sistema stesso esorbiti da Σ_0: allora però la posizione limite del sistema S inerente ad una generica C, tendente a C_1, non è indipendente dal modo come si passa al limite.

rebbe a due diversi sistemi irriducibili completi, contrariamente al teorema del n. 4.

Si può dunque enunciare:

Una curva algebrica sghemba irriducibile, priva di punti multipli, INDIVIDUA *una famiglia (completa) di curve dello stesso ordine e genere.*

In altre parole:

Due famiglie distinte di curve sghembe irriducibili e senza punti multipli, dello stesso ordine e genere, non possono avere in comune che curve dotate di punti multipli (e in particolare spezzate).

Se le due famiglie son costituite da curve dello stesso ordine, ma di generi diversi p, p' $(p > p')$, è senz'altro evidente che ogni curva ad esse comune deve avere qualche punto multiplo, giacchè una tal curva, considerata come limite di una curva di genere p, dovrà possedere qualche punto multiplo proprio [1], che ne abbassi il genere per lo meno al valore p'.

La conclusione, alla quale siamo giunti per le curve algebriche sghembe irriducibili e prive di punti multipli, si potrebbe estendere ad ogni curva, irriducibile o no, sulla quale fosse assegnato il gruppo dei punti multipli proprî ed il gruppo dei punti multipli improprî variabili; e il risultato si potrebbe infine trasportare, in modo del tutto analogo, alle curve appartenenti ad una varietà a tre dimensioni e più in generale alle varietà ad h dimensioni $(1 \leq h \leq k-1)$ contenute in una data V_k.

Ma su ciò, come sulle conseguenze che dal teorema dimostrato derivano per la classificazione delle curve sghembe, spero di tornare in seguito, allorquando potrò occuparmi di sviluppare più ampiamente la mia Nota lincea citata, del maggio 1915.

7. Sistemi continui aventi per elementi sistemi lineari. — Passiamo ora a considerare come elementi di un sistema continuo appartenente alla superficie F, non più le sue curve, ma invece i sistemi lineari completi da esse individuati.

Ci riferiremo all'ipotesi che questi sistemi lineari sieno virtualmente privi di punti base, giacchè questo è il caso che interessa per le proprietà che abbiamo di mira.

Un sistema algebrico irriducibile, formato da $\infty^{q'}$ sistemi lineari completi, si indicherà con (A), ove $|A|$ denota il generico sistema lineare in esso contenuto [2]. E si dirà che (A) è *completo*, quando non è contenuto in una varietà algebrica irriducibile più ampia, di sistemi lineari dello stesso ordine.

La dimensione q' del sistema non supera l'irregolarità q di F, e vi

[1] Ved. la mia Nota lincea citata, *Sulla classificazione delle curve*, ecc. n. 5.

[2] La notazione risponderebbe meglio al concetto, se il sistema definito s'indicasse con $\{|A|\}$ o con $(|A|)$; ma si avrebbe così una notazione ingombrante!

sono sistemi per cui il limite superiore è raggiunto [1]. Si indichi ora con (B) un altro sistema completo — si sottintende irriducibile — formato da ∞^q sistemi lineari distinti. Fissato in (A) un generico sistema lineare $|A_0|$, i sistemi $|A_0+B|$ riempiono un medesimo sistema irriducibile $\Sigma=(A_0+B)$, che contiene ∞^q sistemi lineari distinti e che è quindi, esso pure, completo. Variando $|A_0|$ in (A), poichè Σ non potrebbe che variare con continuità e d'altra parte ciò non è possibile, a cagione della sua completezza, si conclude che Σ contiene *tutti* i sistemi lineari $|A+B|$. Esso può pertanto chiamarsi la *somma* dei sistemi (A) e (B), e indicarsi col simbolo $(A+B)$.

Si osservi che per questo ragionamento è essenziale l'ipotesi che uno almeno dei sistemi (A), (B) consti di ∞^q sistemi lineari, altrimenti non potrebbe affermarsi che Σ è completo.

Premesso ciò, si consideri in (A) un altro generico sistema $|A_1|$, ed un generico sistema $|B_0|$ in (B). *Esisterà* in (B), per quanto precede, un ben determinato sistema $|B_1|$ tale che

$$|B_0+A_0|=|B_1+A_1|:$$

ossia il sistema $|B_0+A_0-A_1|$ sarà effettivo e coinciderà con un sistema di (B). Poniamo $(C)=(A+B)$ e $|C_0|=|A_0+B_0|$: allora $|C_0|$ contiene parzialmente ogni $|A|$; ed i residui degli $|A|$ rispetto a $|C_0|$ formano un insieme Σ_0, contenuto in (B), i cui elementi corrispondono birazionalmente agli $|A|$.

Se pertanto $q'=q$, Σ_0 abbraccia tutto (B), e si ha il noto risultato che (A) e (B) sono birazionalmente identici fra loro ed alla *varietà di Picard* V_q, relativa ad F [2].

Se invece $q'<q$, la totalità ∞^q dei $|C|$, al pari di quella dei $|B|$, sarà ancora birazionalmente identica a V_q, mentre (A) sarà identica ad una varietà contenuta in (C) o in (B), cioè in V_q. Dico che, comunque, (A) è esso stesso identico ad una varietà di Picard $W_{q'}$, di dimensione q'.

All'uopo si consideri l'insieme Γ degli $\infty^{q'}$ sistemi $|C|$ somme dei singoli $|A|$ *con un medesimo* $|B_0|$. Non può evidentemente esistere un insieme *continuo* più ampio di sistemi $|C|$, contenenti tutti parzialmente $|B_0|$, e abbracciante Γ, perchè se no (A) non sarebbe completo. Si avverta incidentalmente che non rimane per questo escluso che i residui dei $|C|$ contenenti $|B_0|$, si distribuiscano in più totalità distinte di sistemi lineari (cfr. col numero successivo): se così fosse, noi, fra quei $|C|$, ci limiteremmo a considerar soltanto quelli che dànno per residui gli $|A|$.

[1] Veggasi ad es. la mia Nota, *Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica* (Atti del R. Ist. Veneto, tomo 68, 1909).

[2] Cfr. Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare*. [Questi Rendiconti, (5), tomo 14, 1905, nn. 2-6].

Secondo quanto prima si disse, ogni sistema $|C_0| = |A_0 + B_0|$ di Γ contiene parzialmente ogni $|A|$; ed i residui riempiono un sistema Σ_0, di $\infty^{q'}$ sistemi lineari. L'insieme Γ contiene dunque parzialmente tutti i sistemi lineari di Σ_0; e poichè i residui di un qualunque $|B_1|$ di Σ_0, rispetto agli $\infty^{q'}$ sistemi $|C|$ di Γ, sono $\infty^{q'}$ distinti, essi riempion tutto il sistema completo (A). Insomma, gli elementi di Γ non si ottengono soltanto aggiungendo al sistema $|B_0|$, da cui partimmo, i singoli $|A|$; ma anche aggiungendo a questi un altro qualunque sistema $|B_1|$ di Σ_0.

Da quanto precede si trae che Γ è perfettamente definito, entro la varietà (C), da uno qualunque de' suoi sistemi lineari, e che perciò, al variare di $|B_0|$ entro (B), Γ o Σ_0, i quali come totalità di $\infty^{q'}$ elementi son birazionalmente identici ad (A), descrivono rispettivamente, in (C) ed in (B), due sistemi di $\infty^{q-q'}$ varietà di dimensione q', che non hanno a due a due alcun elemento comune.

Si conclude pertanto che la picardiana V_q contiene un sistema $\infty^{q-q'}$ d'indice 1, di varietà $W_{q'}$, birazionalmente identiche ad (A). Il gruppo continuo permutabile G_q, appartenente a V_q, non può che mutare in sè il suddetto sistema, chè altrimenti esso avrebbe il grado > 0.

Ne deriva che una $W_{q'}$ è lasciata ferma da $\infty^{q'}$ trasformazioni di G_q, formanti entro G_q un sottogruppo algebrico $G_{q'}$. Ed è noto che ciò equivale ad affermare che V_q ed F ammettono un sistema di q' integrali semplici di 1ª specie con $2q'$ periodi ridotti [1], i quali corrispondono agli integrali relativi alla picardiana (A).

Si arriva così al teorema:

Una superficie d'irregolarità $q > 0$, la quale contenga un sistema irriducibile completo, formato da $\infty^{q'}$ $(0 < q' < q)$ sistemi lineari, possiede in conseguenza q' integrali riducibili di 1ª specie con $2q'$ periodi ridotti.

Un corollario immediato, che vale la pena di notare, è il seguente:

Sopra una superficie d'irregolarità q, priva d'integrali riducibili semplici di 1ª specie, e, a fortiori, sopra una superficie la cui varietà picardiana sia a moduli generali, OGNI *sistema completo non lineare, di sistemi lineari, consta di ∞^q sistemi lineari distinti.*

Con che naturalmente non si esclude che la data superficie F possa contenere sistemi *lineari*, non appartenenti a sistemi continui più ampî. Anzi, come ho dimostrato altrove [2], sopra ogni superficie esistono sistemi lineari siffatti. È poi superfluo aggiungere che la F può inoltre contenere

(1) Castelnuovo, loc. cit., nn. 8, 10-13.

(2) *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica.* [Questi Rendiconti, (5), tomo 17, 1908, pag. 467].

sistemi completi, irriducibili *come totalità di curve*, e contenenti meno che ∞^q sistemi lineari, senza che perciò esistano su F integrali riducibili.

Osservazione. — Dalle considerazioni precedenti si trae pure che *sopra una superficie ogni sistema irriducibile completo* (A) *di sistemi lineari, è birazionalmente identico ad una varietà di Picard*, e le trasformazioni del relativo gruppo continuo si ottengono mediante le operazioni $+ A_0 - A_1$, ove $|A_0|, |A_1|$ son sistemi variabili in (A).

8. Il teorema di Noether pei sistemi continui aventi per elementi sistemi lineari. — Ricordiamo, ora, che una curva B di F, aritmeticamente effettiva, i cui caratteri virtuali (grado n, genere π, indice di specialità i) soddisfaccian cioè alla disuguaglianza

$$n - \pi + p_a + 1 - i \geq 0,$$

ove p_a è il genere aritmetico di F, *individua* un sistema irriducibile completo (B), formato da ∞^q sistemi lineari (¹).

Essendo (A) un qualunque sistema irriducibile, tracciato su F, e costituito da ∞^q sistemi lineari, uno dei quali sia $|A|$, pel numero precedente, il sistema $|A'| = |A + B - B'|$ sarà effettivo, comunque si scelgano $|B|$, $|B'|$ in (B); e al variare di $|B'|$ in (B), gli ∞^q $|A'|$ formeranno *un* sistema irriducibile Σ, contenente $|A|$.

Viceversa, considerato nel dato (A) un variabile sistema $|A_1|$, sempre pel numero precedente, anche il sistema variabile $|B_1| = |B + A - A_1|$ sarà effettivo e descriverà (B), che è individuato da $|B|$. Vi è pertanto in (A) un sistema $|A_1|$ tale che $|B_1| = |B'|$ e quindi

$$|B + A - A'| = |B + A - A_1|,$$

cioè $|A_1| = |A'|$. Dunque (A) coincide con Σ e si conclude che:

Un sistema irriducibile completo, costituito da ∞^q sistemi lineari, è individuato da uno qualunque di essi.

Da quanto precede si trae che l'operazione di sottrazione applicata a due sistemi completi (A), (B), formati ciascuno da ∞^q sistemi lineari, non può condurre a più d'un sistema ad essi analogo; ed in questo senso può dirsi che *il teorema del resto, nel campo dei sistemi completi formati da ∞^q sistemi lineari, è applicabile proprio come nel campo dei sistemi lineari.*

Osservazione 1ª. — In virtù dell'unicità del sistema completo irriducibile individuato da una *curva* (n. 3), il concetto di somma di due sistemi lineari si trasporta senz'altro anche ai sistemi completi non lineari di curve. Lo stesso non può dirsi del concetto di differenza, perchè, imponendo alle curve di un sistema il passaggio per un dato gruppo di punti

(¹) Ved. la mia Nota citata, *Osservazioni varie*, ecc.

o la condizione di contenere come parte una curva fissata, non sempre si ottiene un sol sistema irriducibile di curve soddisfacenti alla condizione posta.

Osservazione 2ª. — Cade qui in acconcio di osservare pure che « è possibile di costruire su F sistemi completi di ∞^q sistemi lineari *tutti regolari* » (1).

Si può infatti costruire anzitutto su F, priva di punti multipli in S_r, un sistema completo (D) formato da ∞^q sistemi lineari, tutti irriducibili e almeno ∞^2, e tali inoltre che ogni $|D|$ contenga parzialmente un prefissato sistema $|H|$.

Basta all'uopo sceglier su F un sistema (K) di ∞^q sistemi lineari, e prender come sistemi $|D|$ i resti dei sistemi $|K|$ rispetto al sistema lineare staccato su F dalle forme d'ordine l abbastanza alto.

Se, dopo ciò, $|H'|$ denota il sistema aggiunto ad $|H|$, esiste per ogni $|D|$ il sistema lineare $|D'| = |D + H' - H|$ aggiunto a $|D|$. *Ogni* sistema $|D'|$, essendo allora aggiunto ad un sistema lineare irriducibile, almeno ∞^2, è regolare (2), e (D′) è perciò formato da ∞^q sistemi tutti regolari.

In tal caso ogni curva del sistema irriducibile completo $\{D'\}$ individua un sistema lineare completo, che non può esorbitare da $\{D'\}$, sicchè le curve di (D′) son tutte e sole quelle di $\{D'\}$.

Una conseguenza immediata di questa osservazione è che:

« Se su F si hanno due sistemi lineari $|A|$, $|B|$ appartenenti ad un « medesimo sistema irriducibile completo di sistemi lineari, se cioè, con la « notazione introdotta ne' miei lavori sulla base, $A \equiv B$, le curve A, B « possono considerarsi come resti di una medesima curva C rispetto ad un « sistema irriducibile di curve » (3).

È chiaro infatti che ognuno dei sistemi $|D'|$ sopra costruiti, quando l è abbastanza grande, contiene parzialmente A. Presa allora come curva C un resto di A rispetto ad un prefissato $|D'|$, il sistema $|C + B|$ appartieue al sistema $(C + A) = (D')$, e perciò la curva $C + B$ appartiene a $\{D'\}$.

Osservazione 3ª. — Le considerazioni esposte nei nn. 7 e 8 si trasportano senz'altro ai sistemi continui aventi per elementi sistemi lineari di varietà a $k - 1$ dimensioni, entro una varietà a k dimensioni.

(1) Ved. a tal uopo il n. 14 della citata Memoria di Albanese, ove l'osservazione è maggiormente determinata. Qui mi basta quel che espongo allo scopo di giustificare una affermazione contenuta nella nota (1) a piè della pag. 459 del presente lavoro.

(2) Ved. la mia Nota citata, *Sulla regolarità del sistema aggiunto*, ecc.

(3) Cfr. con la nota (1) a pag. 459.