ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

con

$$
(26'_1)\quad \begin{cases} F_1 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\sigma_3}\left[X\cos n\tau + \dfrac{c}{\varepsilon}(V\cos n\zeta - W\cos n\eta)\right]\dfrac{d\sigma_3}{r}, \dots; \\ G_1 = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\sigma_3}\left[U\cos n\tau - \dfrac{c}{\mu}(Y\cos n\zeta - Z\cos n\eta)\right]\dfrac{d\sigma_3}{r}, \dots. \end{cases}
$$

Dalla prima di queste due formole si deducono Y e Z con rotazioni circolari, ed allo stesso modo si deducono V e W dalla seconda. Può essere utile tener presente che, in questo caso, X, Y, Z e U, V, W sono le componenti dei vettori stessi $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, e che u, v, w sono le componenti di $\mathfrak{f}$.

Matematica. — *Analisi metrica delle quasi-asintotiche sulle superficie degli iperspazi.* Nota II di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

7. Il teorema precedente dà modo di calcolare tutte le curvature della quasi-asintotica, meno la $(n-1)$-esima.

Dalle (6) e (7) si ricava che nel punto considerato essa vale

$$
\frac{1}{\varrho_{n-1}} = \pm \frac{d^n z_{n-2}}{d^{n-1} z_{n-3}\, dx};
$$

quindi, per la (8),

$$
1/\varrho_{n-1} = \pm z^{(11)}_{n-2}/z^{(01)}_{n-3}.
$$

Per trovarne il significato geometrico, scriviamo le equazioni della superficie nell'intorno del punto (origine). Per le (3), (4), (5) esse si scrivono

$$
\begin{aligned}
z_1 &= z_1^{(01)}y + \tfrac{1}{2}\{z_1^{(20)}x^2 + 2z_1^{(11)}xy + z_1^{(02)}y^2\} + \cdots \\
&\;\;\vdots \\
z_{n-3} &= z_{n-3}^{(01)}y + \tfrac{1}{2}\{z_{n-3}^{(20)}x^2 + 2z_{n-3}^{(11)}xy + z_{n-3}^{(02)}y^2\} + \cdots \\
z_{n-2} &= \qquad\qquad\qquad\qquad z_{n-2}^{(11)}xy + \tfrac{1}{2}z_{n-2}^{(02)}y^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Si consideri la proiezione della superficie sull'S_3 del piano osculatore e della $(n-1)$-esima normale principale, rappresentata dall'ultima equazione: se k rappresenta la curvatura gaussiana di questa superficie nel punto, si ha notoriamente $z^{(11)}_{n-2} = \sqrt{-k}$.

Consideriamo ancora la proiezione ortogonale della superficie sullo S_3 dello S_2 osculatore e della $(n-2)$-esima normale principale: e diciamo λ

l'angolo del piano tangente alla superficie proiezione col piano osculatore. Si ha $z_{n-3}^{(01)} = \operatorname{tg} \lambda$, quindi

$$1/\varrho_{n-1} = \sqrt{-k}/\operatorname{tg} \lambda .$$

È questa una prima interpretazione geometrica, che estende in un certo senso il teorema di Enneper: tuttavia, questo teorema non rientra nel nostro, per la dimostrazione del quale è necessariamente $n > 3$. Del resto, se si volesse interpretare formalmente la relazione precedente anche nello spazio ordinario si otterrebbe al secondo membro un'espressione d'apparenza indeterminata.

8. Si può dare un'altra interpretazione della $(n-1)$-esima curvatura della quasi-asintotica, introducendo la considerazione della curvatura totale (gaussiana) della superficie data [1]

$$K = \frac{D D'' - D'^2}{I_{1010} I_{0101} - I_{1001}^2},$$

ove

$$(I_{1010} I_{0101} - I_{0110} I_{1001})\, D = \begin{Vmatrix} x^{(10)} & y^{(10)} & z_1^{(10)} & \ldots & z_{n-2}^{(10)} \\ x^{(01)} & y^{(01)} & z_1^{(01)} & \ldots & z_{n-2}^{(01)} \\ x^{(20)} & y^{(20)} & z_1^{(20)} & \ldots & z_{n-2}^{(20)} \end{Vmatrix}$$

$$(I_{1010} I_{0101} - I_{0110} I_{1001})\, D'' = \begin{Vmatrix} x^{(10)} & y^{(10)} & z_1^{(10)} & \ldots & z_{n-2}^{(10)} \\ x^{(01)} & y^{(01)} & z_1^{(01)} & \ldots & z_{n-2}^{(01)} \\ x^{(02)} & y^{(02)} & z_1^{(02)} & \ldots & z_{n-2}^{(02)} \end{Vmatrix}$$

$$(I_{1010} I_{0101} - I_{0110} I_{1001})\, D' = \begin{Vmatrix} x^{(10)} & y^{(10)} & z_1^{(10)} & \ldots & z_{n-2}^{(10)} \\ x^{(01)} & y^{(01)} & z_1^{(01)} & \ldots & z_{n-2}^{(01)} \\ x^{(11)} & y^{(11)} & z_1^{(11)} & \ldots & z_{n-2}^{(11)} \end{Vmatrix}$$

$$I_{hklm} = I_{lmhk} = x^{(hk)} x^{(lm)} + y^{(hk)} y^{(lm)} + \sum_1^{n-2}{}_i\, z_i^{(hk)} z_i^{(lm)} .$$

Se si calcola K nell'origine, tenendo conto delle semplificazioni apportate dalla scelta degli assi, si trova:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} 1 + S(z_i^{(01)})^2 & S z_i^{(01)} z_i^{(02)} \\ S z_i^{(01)} z_i^{(20)} & S z_i^{(01)} z_i^{(03)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 + S(z_i^{(01)})^2 & S z_i^{(01)} z_i^{(11)} \\ S z_i^{(01)} z_i^{(11)} & S(z_i^{(11)})^2 \end{vmatrix}}{[1 + S(z_i^{(01)})^2]^2} - \frac{(z_{n-2}^{(11)})^2}{1 + S(z_i^{(01)})^2},$$

il segno S indicando la somma estesa da $i = 1$ ad $i = n - 3$.

[1] E. E. Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* [Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. X (1908)], pag. 16.

Si consideri ora la proiezione ortogonale della superficie sullo S_{n-1} osculatore, e si calcoli la curvatura gaussiana di essa nell'origine, K'. Si trova subito ch'essa differisce da K solo per il sottraendo: e precisamente

$$\frac{(z_{n-2}^{(11)})^2}{1 + S(z_i^{(01)})^2} = K' - K.$$

Si ha quindi

$$1/\varrho_{n-1} = \pm z_{n-2}^{(11)}/z_{n-3}^{(01)} = \pm \sqrt{K' - K}\, \frac{\sqrt{1 + S(z_i^{(01)})^2}}{z_{n-3}^{(01)}}$$

È facile interpretare il 2° fattore a secondo membro. Le equazioni del piano tangente alla superficie nell'origine sono

$$z_i = z_i^{(01)} y \qquad (i = 1, \dots, n-3)$$
$$z_{n-2} = 0;$$

quindi l'inverso di quel fattore è uguale al coseno dell'angolo ω del piano tangente con la $(n-2)$-esima normale. Quindi:

$$\frac{\cos \omega}{\varrho_{n-1}} = \pm \sqrt{K' - K}.$$

La $(n-1)$-esima curvatura di una quasi-asintotica in un punto, moltiplicata per il coseno dell'angolo che la $(n-2)$-esima normale principale forma col piano ivi tangente alla superficie, è uguale alla radice quadrata della differenza fra la curvatura gaussiana della proiezione normale della superficie sullo S_{n-1} osculatore alla curva e la curvatura gaussiana della superficie stessa nel punto considerato.

9. Il teorema così enunciato contiene quello di Enneper; infatti si ha, in esso, $\omega = 0$ (angolo della normale principale col piano tangente) e $K' = 0$ (considerando il piano tangente come proiezione normale della superficie su di esso); quindi $1/\varrho_2 = \sqrt{-K}$. Però questa deduzione non è valida per dimostrazione, esigendo questa che sia $n > 3$.

Ognuna delle espressioni date di $1/\varrho_{n-1}$ (nn. 7 e 8) ha i proprî vantaggi: la prima non richiede se non la considerazione della *curvatura gaussiana di una superficie in* S_3; la seconda richiede invece nozioni un poco più elevate, ma in compenso è più semplice ad enunciarsi e mostra inoltre che $|\cos \omega/\varrho_{n-1}|$ ha lo stesso valore per le due quasi-asintotiche che hanno in un punto comune lo stesso iperpiano osculatore (¹).

(¹) Il teorema di Enneper vale per le superficie a punti planari parabolici, che posseggono cioè un sistema semplice di asintotiche (v. Levi, loc. cit., n. 50): il che è quasi evidente, e non c'informa affatto sulla natura di una superficie generale (proiettivamente) nel suo spazio, essendo quelle superficie del tutto eccezionali.

Le quasi-asintotiche costituiscono invece, anche dal punto di vista metrico, la naturale estensione delle asintotiche.