ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni delle superficie di specie superiore.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e di Neumann in campi prossimi a quelli classici.* Nota III di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nelle prime due Note, pubblicate in questi Rendiconti [1], ho mostrato come, sapendo risolvere i problemi di Dirichlet e di Neumann in un campo S [2], essi possano risolversi in un campo S', deformato infinitesimo di S.

Detti σ e σ' i contorni di S e S', la corrispondenza tra le coppie di punti Q e Q' di detti contorni viene stabilita per mezzo della relazione vettoriale

$$\text{(I)} \qquad Q' = Q + \varepsilon \mathbf{n},$$

dove ε è funzione assegnata dei punti Q di σ ed $\mathbf{n}$ è il vettore unitario, normale a σ in Q e diretto verso S. Trattandosi di deformazione di primo ordine, la funzione ε va trattata come tale rispetto alle dimensioni lineari di σ [3].

(1) *Risoluzione dei problemi di Dirichlet e de Neumann in campi prossimi a quelli classici.* Note I e II, vol. 413, pp. 499.

(2) Trattasi della determinazione di una funzione armonica e regolare in S, dati i valori al contorno della funzione stessa (problema di Dirichlet) oppure della sua derivata normale (problema di Neumann), e — se il campo si estende all'infinito — soddisfacente alle consuete condizioni all'infinito.

(3) Veramente per caratterizzare in modo completo la deformazione di S, cioè il passaggio da S ad S', bisognerebbe assegnare lo spostamento $\mathbf{s}$ di ogni punto P di S; talchè la corrispondenza tra le coppie di punti P e P' di S ed S' risulterebbe definita dalla seguente relazione vettoriale:

$$\text{(II)} \qquad P' = P + \mathbf{s}.$$

La relazione (I), che stabilisce la corrispondenza solamente fra i punti Q e Q' dei contorni σ e σ' di S e S', si deduce facilmente dalle precedenti riportandosi al contorno e ponendo

$$\varepsilon = \mathbf{s} \times \mathbf{n}.$$

Si sarà già notato [cfr. la Nota I] che, per la risoluzione in S' del problema di Dirichlet, basta soltanto la conoscenza di ε nei punti di σ. Per la risoluzione del problema di Neumann [cfr. la Nota II] interviene il vettore $\mathbf{v}$ che implica la conoscenza su σ, oltre che di ε, anche di grad ε, per il che interessa assegnare la (II), almeno nello spazio compreso tra le superficie σ e σ'.

1. Si potranno, in particolare, determinare le funzioni di Green e di Neumann in S'.

In modo preciso, fissato un punto P_1 di S', si sanno determinare due funzioni G'^* e Γ'^* dei punti P' di S', regolari e armoniche, e soddisfacenti, sul contorno σ' (oltre che alle eventuali, ben note, condizioni all' ∞ — se S e quindi S' si estendono all'infinito —) alle seguenti condizioni:

$$G'^* = \frac{1}{\operatorname{mod}(Q' - P_1)} \quad , \quad \frac{d\Gamma'^*}{dn'} = \frac{4\pi}{\sigma'} - \frac{d}{dn'} \frac{1}{\operatorname{mod}(Q' - P_1)} ,$$

dove n' designa ovviamente la direzione della normale nel punto Q' a σ', vòlta verso S'.

Una volta costruite, col procedimento indicato nelle Note citate, le funzioni G'^* e Γ'^*, si otterranno la funzione G' di Green e la funzione Γ' di Neumann relativa al campo S', ponendo

$$G'(P', P_1) = \frac{1}{\operatorname{mod}(P' - P_1)} - G'^*(P', P_1) ,$$

$$\Gamma'(P', P_1) = -\frac{1}{\operatorname{mod}(P' - P_1)} - \Gamma'^*(P', P_1) .$$

Si possono allora scrivere senz'altro le formole risolutive dei problemi armonici in S'.

Esse sono, com'è noto, le seguenti:

$$U(P') = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'} U(Q') \cdot \frac{dG'(P', Q')}{dn'} d\sigma' ,$$

$$U(P') = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'} \frac{dU(Q')}{dn'} \Gamma'(P', Q') \, d\sigma' ,$$

dove U_0 è una costante, a priori arbitraria, che rappresenta la media dei valori assunti dalla funzione U sulla superficie σ'.

2. Supponiamo ora S' non più infinitamente prossimo ad S, ma qualsiasi, purchè si possa considerare proveniente da S per deformazione continua.

Si immagini di passare dalla configurazione S alla configurazione S' mediante un numero m, sufficientemente grande, di tappe successive. Indichiamo con

$$S_1 , S_2 , \dots , S_m$$

le corrispondenti configurazioni assunte dal campo iniziale S. Ciascuna di queste configurazioni si intende prossima tanto a quella che precede quanto a quella che segue, nel senso accennato nelle Note citate e dianzi richiamato.

Si supponga di saper risolvere i problemi armonici in S. Ciò significa, in sostanza, di conoscere le funzioni di Green (pel problema di Dirichlet) e di Neumann (pel secondo problema) relative ad S.

Allora il procedimento, che ha formato oggetto delle Note citate, mostra come si possano risolvere i problemi stessi nel campo S_1, immediatamente prossimo ad S. In particolare, come si è visto, si possono determinare in S_1 le corrispondenti funzioni di Green e di Neumann.

La conoscenza di tali funzioni relative ad S_1 consente — mediante l'applicazione del medesimo procedimento — la risoluzione dei problemi armonici nel campo S_2, immediatamente successivo ad S_1; in particolare (come già precedentemente) la costruzione delle funzioni di Green e di Neumann relative ad S_2. Queste consentiranno di effettuare la risoluzione dei problemi armonici in S_3 e così via.

È manifesto che, così procedendo, si arriverà alla costruzione delle funzioni di Green e di Neumann in S_m, ciò che è sufficiente a risolvere i problemi armonici in S'.

3. Si immagini, in particolare, che lo spazio S' si possa ottenere per deformazione continua da una sfera S, e sia S' interno ad S, se si tratta di risolvere problemi armonici interni, oppure sia S' esterno ad S, nei problemi armonici esterni.

Siccome per la sfera S si sanno risolvere i problemi armonici, così per quanto siamo venuti dicendo si sapranno risolvere anche per il campo S'.

È quasi superfluo il far rilevare che la risolubilità dei problemi armonici essendo intimamente legata alla natura geometrica del campo e non alla misura delle sue dimensioni, una volta assodato che il campo S' è di tale natura da potersi ricavare per deformazione continua da uno spazio sferico S, si potrà sempre scegliere questo di raggio così grande, quando trattasi di problemi armonici interni, oppure di raggio sufficientemente piccolo, nei problemi armonici esterni, per cui S' venga in ogni caso ad appartenere ad S.