ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Meccanica. — *Sulle distorsioni di un cilindro elastico due volte connesso.* Nota della sig.^{na} ELEONORA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Mi propongo di applicare alla determinazione degli spostamenti in un cilindro elastico due volte connesso, sottoposto ad una distorsione, il risultato seguente ottenuto dal prof. Almansi [1].

In un solido elastico isotropo cilindrico, più volte connesso (l'asse z è parallelo alle generatrici del cilindro) si considerino gli spostamenti,

$$
\text{(I)}\qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{2K}\dfrac{\partial \Phi(xy)}{\partial x} + \dfrac{L+2K}{4K(L+K)}\dfrac{\partial \varphi(xy)}{\partial x} \\[2ex] v = -\dfrac{1}{2K}\dfrac{\partial \Phi(xy)}{\partial y} - \dfrac{L+2K}{4K(L+K)}\dfrac{\partial \varphi(xy)}{\partial y} \\[2ex] w = 0\,, \end{cases}
$$

dove $\Phi(xy)$ è tale che: $\Delta^2\Delta^2\Phi = 0$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ regolari in tutto il solido assumono valori costanti sulle superficie laterali, φ è una funzione armonica e $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \Delta^2\Phi$.

Le (I), se le corrispondenti tensioni interne fondamentali non sono tutte nulle, rappresentano spostamenti polidromi soddisfacenti alle seguenti proprietà:

1°) corrispondono a forze di massa nulle;

2°) gli elementi della superficie esterna paralleli all'asse non sono sollecitati.

Suppongo ora di operare in un cilindro elastico isotropo limitato fra due cilindri circolari (non aventi lo stesso asse) un taglio lungo una generatrice, e risaldare, dopo aver fatto subire all'una faccia del taglio uno spostamento l parallelamente ad x. Mi propongo la determinazione degli spostamenti nell'ipotesi che sul corpo non agiscano forze di massa nè tensioni superficiali sulle superficie cilindriche laterali, potendo o no le basi essere sollecitate. Premetterò le seguenti osservazioni. Posso, mediante una inversione per raggi vettori reciproci rispetto ad un cerchio, mutare in una corona circolare lo spazio compreso fra due circonferenze interne l'una all'altra:

$$
\text{(II)}\qquad (x+c)^2 + y^2 = r_1^2 \qquad (x-c)^2 + y^2 = r_2^2 .
$$

[1] *Sopra una classe particolare di deformazioni a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici.*

Perchè le inverse siano concentriche basta che il centro di inversione sia in uno dei punti **H** e **K** della congiungente i centri:

$$x_{\mathrm{H}}=\frac{r_1^2-r_2^2+\sqrt{[r_1^2-r_2^2]^2+8c^2[2c^2-r_1^2-r_2^2]}}{4c}\quad y_{\mathrm{H}}=0\,,$$

$$x_{\mathrm{K}}=\frac{r_1^2-r_2^2-\sqrt{[r_1^2-r_2^2]^2+8c^2[2c^2-r_1^2-r_2^2]}}{4c}\quad y_{\mathrm{K}}=0\,,$$

che separano armonicamente le coppie di punti $[A_1\,, B_1]$, $[A_2\,, B_2]$ intersezioni della congiungente con ciascuna delle circonferenze. Tali punti H e K sono certo reali perchè per ipotesi $[A_1\,, B_1]$, $[A_2\,, B_2]$ non si separano, K è interno ad entrambe le circonferenze, H è esterno ad entrambe.

Le equazioni delle circonferenze inverse delle date rispetto al cerchio di raggio unitario e centro K, che assumo come origine, sono

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=R_1^2\\ (x-a)^2+y^2=R_2^2\end{cases}$$

se

$$\text{(III)}\quad\begin{cases}a=\dfrac{c-x_{\mathrm{K}}}{c^2+x_{\mathrm{K}}^2-2cx_{\mathrm{K}}-r_2^2}\\[2ex] R_1^2=a^2-\dfrac{1}{c^2+x_{\mathrm{K}}^2+2cx_{\mathrm{K}}-r_1^2}\qquad R_2^2=a^2-\dfrac{1}{c^2+x_{\mathrm{K}}^2-2cx_{\mathrm{K}}-r_2^2}\,.\end{cases}$$

E quindi si vede che l'espressione:

$$J=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2ax}{x^2+y^2}+a^2=a^2\,\frac{\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2+y^2}{x^2+y^2}$$

[dove $a\,, R_1\,, R_2$ hanno i valori (III)] è costante sui due cerchi primitivi, e precisamente è eguale a R_1^2 sul primo, ad R_2^2 sul secondo.

Se i cerchi dati fossero concentrici

$$c=x_{\mathrm{K}}=a=0\;,\;x_{\mathrm{H}}=\infty\;,\;J=\frac{1}{x^2+y^2}\;,\;R_1^2=\frac{1}{r_1^2}\;,\;R_2^2=\frac{1}{r_2^2}\,.$$

Tornando ora al problema che voglio risolvere [prendo come asse z l'asse parallelo alle generatrici del cilindro luogo dei punti K delle sezioni normali] basta che determini una funzione biarmonica Φ tale che $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ regolari in tutto il corpo siano costanti per $J=R_1^2$, $J=R_2^2$ ed una funzione armonica φ tale che $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ sia regolare, mentre:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\text{funzione monodroma}+\frac{l}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x}\,,$$

da cui:

$$\varphi = \frac{l}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\left\{x\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x} + \frac{y}{2}\log[x^2+y^2] + \psi\right\},$$

dove ψ è armonica tale che $\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}$ sono regolari in tutto il solido

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{l}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\left\{-\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} = \Delta^2\Phi,$$

quindi

$$\Phi = \frac{l}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\left\{-\frac{y}{4}\log(x^2+y^2) + \frac{1}{2}\chi\right\},$$

χ essendo biarmonica tale che $\frac{1}{2}\Delta^2\chi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{l}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\left[-\frac{xy}{2(x^2+y^2)} + \frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{l}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\left[-\frac{y^2}{2(x^2+y^2)} - \frac{1}{4}\log(x^2+y^2) + \frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial y}\right],$$

debbano ridursi costanti per $J = R_1^2$, $J = R_2^2$ per questo basta che χ sia tale che:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = \frac{xy}{x^2+y^2} + f_1(xy)\,(J-R_1^2)\,(J-R_2^2) + \lambda(J)$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial y} = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + \frac{y^2}{x^2+y^2} + f_2(xy)\,(J-R_1^2)\,(J-R_2^2) + \mu(J),$$

perchè una tale funzione χ esista occorre che coincidano le due espressioni:

$$(\mathrm{IV})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{2xy^2}{[x^2+y^2]^2} + \lambda'(J)\,\dfrac{\partial J}{\partial y} + \\ \qquad + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\,(J-R_1^2)\,(J-R_2^2) + f_1\,\dfrac{\partial J}{\partial y}\,(2J-R_1^2-R_2^2) \\ \dfrac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{2xy^2}{[x^2+y^2]^2} + \mu'(J)\,\dfrac{\partial J}{\partial x} + \\ \qquad + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\,(J-R_1^2)\,(J-R_2^2) + f_2\,\dfrac{\partial J}{\partial x}\,(2J-R_1^2-R_2^2).\end{cases}$$

Se

$$f_1 = \alpha(J)\,y\,\frac{\partial J}{\partial x},\quad f_2 = \alpha(J)\,y\,\frac{\partial J}{\partial y},\quad \mu'(J) = \alpha(J)\,(J-R_1^2)\,(J-R_2^2)$$

le (IV) coincidono. Ora debbo determinare $\alpha(J)$ in modo che $\frac{\partial\chi}{\partial x}\,\frac{\partial\chi}{\partial y}$ non contengano più rispettivamente i termini $\frac{xy}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\frac{y^2}{x^2+y^2}$ altrimenti troverei $\chi=\frac{y}{2}\log(x^2+y^2)+\cdots$ e si perderebbe in φ il termine polidromo che voglio compaia. Posso ottenere ciò prendendo:

$$\alpha(\mathrm{J})=-\frac{1}{2(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\frac{1}{\mathrm{J}^2}.$$

Sostituendo nelle espressioni delle derivate di χ ed integrando:

$$\chi=\frac{1}{2}y\log a^2\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]-\frac{y}{2(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\left[\mathrm{J}-\frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{J}}\right],$$

la quale è biarmonica ed ha derivate rispetto ad x e ad y regolari nell'interno del corpo perchè l'asse $x=\frac{1}{a}\,y=0$ luogo di punti H è esterno al solido. Trovata χ ho facilmente ψ tenendo conto che:

$$\Delta^2\psi=0\quad\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\Delta^2\chi}{2},$$

quindi:

$$\Phi=\frac{l}{2\pi}\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left[\frac{1}{4}y\log\mathrm{J}-\frac{y}{4(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\left[\mathrm{J}-\frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{J}}\right]\right]$$

$$\varphi=\frac{l}{2\pi}\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{x\operatorname{artg}\frac{y}{x}-\left(x-\frac{1}{a}\right)\operatorname{artg}\frac{y}{x-\frac{1}{a}}-\right.$$

$$\left.-\frac{y}{2}\log\mathrm{J}-\frac{a}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\operatorname{artg}\frac{y}{x}-\frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{a^3(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\operatorname{artg}\frac{y}{x-\frac{1}{a}}\right\}.$$

Determinate Φ e φ dalle (I) ho gli spostamenti cercati.

Suppongo ora invece che eseguito un taglio nel piano xz si sposti una faccia di esso parallelamente all'asse y di m. Per determinare gli spostamenti debbo, analogamente al caso precedente, determinare due funzioni Φ e φ che soddisfino alle condizioni imposte dal prof. Almansi, e di più $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ sia regolare, mentre:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\text{funzione monodroma}-\frac{m}{2\pi}\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\operatorname{artg}\frac{y}{x},$$

da cui:

$$\varphi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{-y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\,x\log(x^2+y^2)+\psi\right\}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{m}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} = \Delta^2\Phi$$

$$\Phi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{\frac{x}{4}\log(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\chi\right\}.$$

Allo scopo di rendere $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ costanti per $\mathrm{J}=\mathrm{R}_1^2$, $\mathrm{J}=\mathrm{R}_2^2$ cerco di determinare χ in modo che:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = -\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+f_1(xy)\,(\mathrm{J}-\mathrm{R}_1^2)\,(\mathrm{J}-\mathrm{R}_2^2)+\lambda(\mathrm{J});$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial y} = -\frac{xy}{x^2+y^2}+f_2(xy)\,(\mathrm{J}-\mathrm{R}_1^2)\,(\mathrm{J}-\mathrm{R}_2^2)+\mu(\mathrm{J}),$$

ed una tale funzione χ esiste se coincidono le due espressioni $\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2\chi}{\partial y\,\partial x}$. L'esame della forma di tali derivate seconde e l'opportunità di far sparire dalle derivate prime di χ certi termini, suggerisce la scelta:

$$f_1(x,y) = \frac{1}{2(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\,\frac{x}{\mathrm{J}^2}\,\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial x}\,,\quad f_2(xy) = \frac{1}{2(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\,\frac{x}{\mathrm{J}^2}\,\frac{\partial\mathrm{J}}{\partial y}\,,$$

$$\lambda'(\mathrm{J}) = \frac{1}{2(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\left\{1-\frac{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{J}}+\frac{\mathrm{R}_1^2\,\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{J}^2}\right\}.$$

Sostituiti i quali valori, si ha con una integrazione:

$$\text{(V)}\qquad \chi = -\frac{x}{2}\log a^2\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]+\frac{x}{2(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\left\{\mathrm{J}-\frac{\mathrm{R}_1^2\,\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{J}}\right\}.$$

Ma tale funzione χ non è biarmonica per la comparsa del termine:

$$\frac{\mathrm{R}_1^2\,\mathrm{R}_2^2}{2a^4(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\,\frac{x}{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2}.$$

Cercherò di renderla tale mediante l'aggiunta di alcuni termini la cui somma soddisfi ancora alla proprietà di avere derivate rispetto ad x ed y costanti per $\mathrm{J}=\mathrm{R}_1^2$, $\mathrm{J}=\mathrm{R}_2^2$. Aggiungo intanto a χ la funzione

$$-\frac{s}{2a(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\left\{\mathrm{J}-(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)\log\mathrm{J}-\frac{\mathrm{R}_1^2\,\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{J}}\right\}$$

che gode di questa proprietà. Allora:

$$\chi = -\frac{x}{2}\log a^2\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]+\frac{(1-s)\,x}{2(R_1^2+R_2^2)}\left\{J-\frac{R_1^2 R_2^2}{J}\right\}+$$
$$+\frac{s\left(x-\frac{1}{a}\right)}{2(R_1^2+R_2^2)}\left\{J-\frac{R_1^2 R_2^2}{J}\right\}+\frac{s}{2a}\log J\,,$$

la quale non è biarmonica per la comparsa dei termini:

$$-\frac{s}{2a(R_1^2+R_2^2)}\,\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{(1-s)\,R_1^2 R_2^2}{2a^4(R_1^2+R_2^2)}\,\frac{x}{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2}\,.$$

Posso eliminare tale inconveniente aggiungendo la funzione:

$$\text{(VI)}\qquad \mu=(x^2+y^2)\left[c_1+\frac{s}{2a(R_1^2+R_2^2)}\,J^2\right]+$$
$$+\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]\left[b_1+\frac{(1-s)\,R_1^2 R_2^2 a^3}{2(R_1^2+R_2^2)}\,\frac{1}{J^2}\right].$$

Ora debbo determinare $s\,,b_1\,,c_1$ in modo che $\frac{\partial\mu}{\partial x}\,,\ \frac{\partial\mu}{\partial y}$ siano costanti per $J=R_1^2$, $J=R_2^2$.

Mineralogia. — *Notizie cristallografiche sulla piemontite di St. Marcel* (Valle d'Aosta) [1]. Nota di F. Balzac, presentata dal Socio E. Artini.

La piemontite rappresenta, com'è noto, un minerale assai interessante, perchè è uno dei pochissimi silicati nei quali esiste il manganese trivalente come sostituente del ferro e dell'alluminio, pure trivalenti. Data la scarsezza dei dati cristallografici esistenti intorno ai composti del manganese trivalente, può dirsi che nulla si conosce di preciso intorno all'effetto morfotropico determinato dalla sostituzione, in un composto, del manganese al ferro ferrico ed all'alluminio. Sotto questo punto di vista, la piemontite merita una particolare attenzione, perchè, data la quantità considerevole di Mn_2O_3 in essa contenuta, sembrerebbe dovesse essere possibile, confrontando le costanti cristallografiche di questo minerale con quelle dell'epidoto, di determinare quali variazioni, nel rapporto assiale dell'epidoto, vengono causate dall'entrata di Mn_2O_3 al posto di una parte di Al_2O_3 e di Fe_2O_3.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di mineralogia della R. Università di Torino, diretto dal prof. Ferruccio Zambonini.