ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1916.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli spazî normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Uno spazio curvo S_3 a tre dimensioni, definito dalla espressione del suo ds^2

$$ds^2 = \sum_{r,s}^{1\ldots3} a_{rs}\, du_r\, du_s ,$$

si dirà *normale* quando colle linee delle sue tre congruenze principali si può costituire un sistema triplo di superficie ortogonali (1). Questi spazî normali si presentano in connessione coi generali sistemi tripli coniugati di Darboux (ved. Mem. cit.).

Vogliamo risolvere nella presente Nota il problema di *trovare tutti gli spazî normali* S_3 *le cui tre curvature principali sono costanti.* Si vedrà che, oltre gli spazî di curvatura costante, esistono tre soli tipi di spazî di questa specie; e questi appartengono alla classe generale, studiata in una mia Memoria del 1897, degli spazî che ammettono un gruppo continuo di movimenti (2). Per gli spazî del primo tipo il gruppo è un G_3 transitivo; per quelli degli altri due tipi, un G_4 transitivo e sistatico.

(1) Cfr. il § 2 della mia Memoria *Sui sistemi tripli coniugati* ecc. [Annali di matematica, tomo 23° (1914)]; e i §§ 162-163 delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (vol. I).

(2) *Sugli spazî a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*, Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, tomo XI,

2. Riferiamo lo spazio S_3, supposto normale, al sistema triplo ortogonale (u_1, u_2, u_3) le cui linee coordinate $(u_1), (u_2), (u_3)$ formano le congruenze principali, onde il ds^2 avrà intanto la forma normale

$$ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2 .$$

Essendo le direzioni principali quelle delle linee coordinate $(u_1), (u_2), (u_3)$, saranno nulli i tre simboli riemanniani a quattro indici

$$(21, 13) \ , \ (32, 21) \ , \ (13, 32)$$

costruiti per la forma differenziale (1): ossia le funzioni H_1, H_2, H_3 di u_1, u_2, u_3 dovranno soddisfare le tre equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial u_2 \partial u_3} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} + \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3} \\ \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial u_3 \partial u_1} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} + \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial^2 H_3}{\partial u_1 \partial u_2} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1} + \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2} . \end{cases}$$

Ora, se indichiamo con k_1, k_2, k_3 le tre curvature principali nelle rispettive giaciture delle superficie coordinate $u_1 = \text{cost}$, $u_2 = \text{cost}$, $u_3 = \text{cost}$, queste si esprimono, per gli altri tre simboli di Riemann, colle formole

$$k_1 = \frac{(23, 23)}{H_2^2 H_3^2} \quad , \quad k_2 = \frac{(31, 31)}{H_3^2 H_1^2} \quad , \quad k_3 = \frac{(12, 12)}{H_1^2 H_2^2} ,$$

che, sviluppate, si scrivono

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3}\right) + \dfrac{1}{H_1^2}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1} + k_1 H_2 H_3 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_1}\right) + \dfrac{1}{H_2^2}\dfrac{\partial H_3}{\partial u_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} + k_2 H_3 H_1 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_4}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2}\right) + \dfrac{1}{H_3^2}\dfrac{\partial H_1}{\partial u_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} + k_3 H_1 H_2 = 0 . \end{cases}$$

Supposto adunque che k_1, k_2, k_3 siano tre costanti date, il nostro problema consiste nell'esaminare se il sistema differenziale, formato dalle sei equazioni (2), (3) per le tre funzioni incognite H_1, H_2, H_3 di u_1, u_2, u_3, ammette soluzioni, e nel trovarne le soluzioni più generali.

E qui escluderemo il caso ben noto in cui le tre costanti k_i siano eguali, perchè allora lo spazio è a curvatura di Riemann costante. Allora le equazioni (2), (3) formano un sistema completamente integrabile, come confermeremo fra breve, e servono a determinare *tutti* i sistemi tripli orto-

gonali dello spazio, il triedro delle direzioni principali essendo, in questo caso, affatto indeterminato.

3. Per compiere più simmetricamente i calcoli, introduciamo le sei rotazioni (Darboux)

$$(a) \qquad \beta_{rs} = \frac{1}{H_r}\frac{\partial H_s}{\partial u_r} \qquad (r \neq s),$$

dopo di che le (2) assumono la forma

$$(b) \qquad \frac{\partial \beta_{rs}}{\partial u_t} = \beta_{rt}\,\beta_{ts} \qquad (r \neq s \neq t),$$

dove con r, s, t si indica una qualunque permutazione degli indici $1, 2, 3$, e le (2) diventano

$$(c) \qquad \frac{\partial \beta_{rs}}{\partial u_r} + \frac{\partial \beta_{sr}}{\partial u_s} + \beta_{tr}\,\beta_{ts} + k_t H_r H_s = 0 .$$

Debbiamo allora esaminare il sistema differenziale costituito dalle 15 equazioni (a), (b), (c) per le 9 funzioni incognite H_r, β_{rs}, e per questo cominciamo a dedurne delle ulteriori conseguenze differenziali. Si derivi la (c) rispetto ad u_t e vi si sottragga la (b) derivata rispetto ad u_r; riducendo, coll'aver riguardo alle (a), (b), (c) stesse, troviamo

$$(k_t - k_r)\frac{\beta_{tr}}{H_r} = (k_t - k_s)\frac{\beta_{ts}}{H_s} = 0 :$$

ossia, scrivendo per disteso, le tre relazioni

$$(4) \qquad \begin{cases} (k_3 - k_1)\dfrac{\beta_{31}}{H_1} = (k_2 - k_3)\dfrac{\beta_{32}}{H_2} \\ (k_1 - k_2)\dfrac{\beta_{12}}{H_2} = (k_3 - k_1)\dfrac{\beta_{13}}{H_3} \\ (k_2 - k_3)\dfrac{\beta_{23}}{H_3} = (k_1 - k_2)\dfrac{\beta_{21}}{H_1} . \end{cases}$$

Si osservi che nel caso degli spazî a curvatura riemanniana costante ($k_1 = k_2 = k_3$), ed in questo soltanto, le (4) sono identicamente soddisfatte; ed il sistema è chiuso e completamente integrabile, come già sopra si è detto.

4. Cominciamo dal considerare il caso precisamente opposto a quello degli spazî a curvatura costante, quello cioè in cui si suppongano *tutte e tre le differenze* $k_1 - k_2$, $k_2 - k_3$, $k_3 - k_1$ *diverse da zero.*

A causa delle (4), possiamo in tal caso esprimere le sei rotazioni β_{rs}, per tre sole incognite ausiliarie Φ_1, Φ_2, Φ_3, colle posizioni:

$$(5)\qquad \begin{cases} \beta_{12} = (k_3 - k_1)\,\Phi_1 H_2 \quad , \quad \beta_{13} = (k_1 - k_2)\,\Phi_1 H_3 \\ \beta_{23} = (k_1 - k_2)\,\Phi_2 H_3 \quad , \quad \beta_{21} = (k_2 - k_3)\,\Phi_2 H_1 \\ \beta_{31} = (k_2 - k_3)\,\Phi_3 H_1 \quad , \quad \beta_{32} = (k_3 - k_1)\,\Phi_3 H_2 \,. \end{cases}$$

Introducendo questi valori delle β nelle (a) e nelle (b), troviamo, per le sei funzioni incognite H_r, Φ_r, le equazioni seguenti:

$$(A)\qquad \begin{cases} * \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_2} = (k_2 - k_3)\,\Phi_2 H_1 H_2 \quad , \quad \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = (k_2 - k_3)\,\Phi_3 H_1 H_3 \\ \frac{\partial H_2}{\partial u_1} = (k_3 - k_1)\,\Phi_1 H_2 H_1 \quad , \quad * \quad , \quad \frac{\partial H_2}{\partial u_3} = (k_3 - k_1)\,\Phi_3 H_2 H_3 \\ \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = (k_1 - k_2)\,\Phi_1 H_3 H_1 \quad , \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = (k_1 - k_2)\,\Phi_2 H_3 H_2 \quad , \quad * \end{cases}$$

$$(B)\qquad \begin{cases} * \quad , \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} = (k_2 + k_3 - 2k_1)\,H_2 \Phi_1 \Phi_2 \quad , \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_3} = (2k_1 - k_2 - k_3)\,H_3 \Phi_1 \Phi_3 \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} = (2k_2 - k_3 - k_1)\,H_1 \Phi_2 \Phi_1 \quad , \quad * \quad , \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_3} = (k_3 + k_1 - 2k_2)\,H_3 \Phi_2 \Phi_3 \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_1} = (k_1 + k_2 - 2k_3)\,H_1 \Phi_3 \Phi_1 \quad , \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial u_2} = (2k_3 - k_1 - k_2)\,H_2 \Phi_3 \Phi_2 \quad , \quad * \end{cases}$$

Delle altre tre equazioni, che risultano similmente dalle (c), basterà tener conto più oltre.

5. Se dalle (B) della prima linea formiamo la condizione d'integrabilità,

$$(k_2 + k_3 - 2k_1)\left\{\frac{\partial}{\partial u_3}(H_2 \Phi_1 \Phi_2) + \frac{\partial}{\partial u_2}(H_3 \Phi_1 \Phi_3)\right\} = 0\,,$$

e sviluppiamo colle (A), (B) stesse, sopprimendo il fattore non nullo $4(k_3 - k_2)\,H_2 H_3$, troviamo

$$(k_2 + k_3 - 2k_1)\,\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = 0\,;$$

e in simil modo, dalle (B) delle altre due linee,

$$(k_3 + k_1 - 2k_2)\,\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = 0$$
$$(k_1 + k_2 - 2k_3)\,\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 = 0\,.$$

Se ne deduce che, non potendo annullarsi insieme i tre fattori

$$k_2 + k_3 - 2k_1 \quad , \quad k_3 + k_1 - 2k_2 \quad , \quad k_1 + k_2 - 2k_3$$

(altrimenti le tre k sarebbero eguali contro l'ipotesi) dovrà necessariamente annullarsi una delle tre Φ. Possiamo supporre che sia

$$\Phi_3 = 0 ,$$

e allora dalle (A), (B) segue che $H_1 , H_2 , \Phi_1 , \Phi_2$ hanno nulle le derivate rapporto ad u_3, cioè sono funzioni di $u_1 . u_2$ soltanto, assoggettate a soddisfare alle equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} = (k_2 - k_3)\,\Phi_2 H_1 H_2 \quad , \quad \dfrac{\partial H_2}{\partial u_1} = (k_3 - k_1)\,\Phi_1 H_2 H_3 \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} = (k_2 + k_3 - 2k_1)\,H_2 \Phi_1 \Phi_2 \quad , \quad \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} = (2k_2 - k_1 - k_3)\,H_1 \Phi_1 \Phi_2 . \end{cases}$$

Note che siano $H_1 , H_2 , \Phi_1 , \Phi_2$, la H_3 è determinata, a meno di un fattore funzione (arbitraria) di u_3, dalle equazioni (A)

$$(6^*) \qquad \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = (k_1 - k_2)\,\Phi_1 H_1 H_3 \quad , \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = (k_1 - k_2)\,\Phi_2 H_2 H_3 .$$

Ma ora introduciamo in calcolo anche le condizioni (c), che scriviamo per disteso

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + \beta_{12}\beta_{13} + k_1 H_2 H_3 = 0 \\ \dfrac{\partial \beta_{31}}{\partial u_3} + \dfrac{\partial \beta_{13}}{\partial u_1} + \beta_{23}\beta_{21} + k_2 H_3 H_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \beta_{12}}{\partial u_1} + \dfrac{\partial \beta_{21}}{\partial u_2} + \beta_{31}\beta_{32} + k_3 H_1 H_2 = 0 . \end{cases}$$

Introducendovi i valori (5) delle β, ove è da farsi $\Phi_3 = 0$, si hanno le tre equazioni

$$\begin{cases} (k_1 - k_2)\,\dfrac{\partial}{\partial u_2}(\Phi_2 H_3) + (k_1 - k_2)(k_3 - k_1)\,\Phi_1^2 H_2 H_3 + k_1 H_2 H_3 = 0 \\ (k_1 - k_2)\,\dfrac{\partial}{\partial u_1}(\Phi_1 H_3) + (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)\,\Phi_2^2 H_1 H_3 + k_2 H_1 H_3 = 0 \\ (k_3 - k_1)\,\dfrac{\partial}{\partial u_1}(\Phi_1 H_2) + (k_2 - k_3)\,\dfrac{\partial}{\partial u_2}(\Phi_2 H_1) + k_3 H_1 H_2 = 0 . \end{cases}$$

Eseguendo le derivazioni, colle (6), (6*), queste diventano

$$(7^*)\quad \begin{cases} (k_1-k_2)\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2}+(k_1-k_2)(k_3-k_1)\Phi_1^2+ \\ \qquad\qquad +(k_1-k_2)^2\Phi_2^2+k_1=0 \\ (k_1-k_2)\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}+(k_1-k_2)^2\Phi_1^2+ \\ \qquad\qquad +(k_1-k_2)(k_2-k_3)\Phi_2^2+k_2=0 \\ (k_3-k_1)\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}+(k_2-k_3)\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2}+ \\ \qquad\qquad +(k_3-k_1)^2\Phi_1^2+(k_2-k_3)^2\Phi_2^2+k_3=0. \end{cases}$$

Le prime due, risolute, dànno

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}=-H_1\left\{(k_1-k_2)\Phi_1^2+(k_2-k_3)\Phi_2^2+\dfrac{k_2}{k_1-k_2}\right\} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial u_2}=-H_2\left\{(k_3-k_1)\Phi_1^2+(k_1-k_2)\Phi_2^2+\dfrac{k_1}{k_1-k_2}\right\} \end{cases}$$

e, sostituendo nella terza, ne risulta l'equazione in termini finiti tra Φ_1, Φ_2

$$9)\qquad (k_3-k_1)^2\Phi_1^2+(k_2-k_3)^2\Phi_2^2+k_3=0.$$

6. Derivando quest'ultima rapporto ad u_1, u_2, e facendo uso delle (6), (8) e (9), otteniamo le altre due

$$(10)\quad \begin{cases} \Phi_1\left\{(k_1-k_2)(k_1+k_2-2k_3)\Phi_2^2+\dfrac{k_1^2-k_2k_3}{k_1-k_2}\right\}=0 \\ \Phi_2\left\{(k_1-k_2)(k_1+k_2-2k_3)\Phi_1^2+\dfrac{k_2^2-k_1k_3}{k_1-k_2}\right\}=0. \end{cases}$$

Da queste deduciamo facilmente che deve ancora annullarsi o Φ_1, o Φ_2. Altrimenti dalle (10), dovendo annullarsi i secondi fattori, dedurremmo che Φ_1, Φ_2 avrebbero valori costanti (non nulli), ovvero sarebbe

$$k_2+k_2=2k_3.$$

Ma, nel primo caso, dalle due seconde (6) avremmo

$$k_2+k_3=2k_1 \quad , \quad k_1+k_3=2k_2,$$

indi anche

$$k_1+k_2=2k_3,$$

e le tre k sarebbero eguali.

Se poi supponiamo $k_1 + k_2 = 2k_3$ e $\Phi_1 \Phi_2 \neq 0$, dalle (10) abbiamo

$$k_1^2 = k_2 k_3 \quad , \quad k_2^2 = k_1 k_3 ;$$

e due k sarebbero eguali, contro l'ipotesi.

Concludiamo quindi che, oltre Φ_3, sarà nulla anche Φ_1 o Φ_2. Supponiamo p. es. $\Phi_2 = 0$: nel qual caso sarà certamente $\Phi_1 \neq 0$, altrimenti, per le (7*), avremmo $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, e lo spazio sarebbe euclideo. Ora dalle (10_1), essendo $\Phi_2 = 0$, $\Phi_1 \neq 0$, segue

$$k_1^2 = k_2 k_3 : \tag{11}$$

cioè *la curvatura principale k_1 è media proporzionale fra le altre due.*

Osserviamo ora che, per la (9), k_3 è certamente negativa; indi anche k_2 per la (11). Indicando adunque con a , b due costanti diseguali non nulle (positive o negative), possiamo porre

$$k_1 = -ab \quad , \quad k_2 = -b^2 \quad , \quad k_3 = -a^2 .$$

Per la prima delle (6) $\dfrac{\partial H_1}{\partial u_2} = 0$, cioè H_1 dipende solo da u_1: sicchè, cangiando questo parametro, possiamo fare $H_1 = 1$. Dovendo poi annullarsi, per la (9),

$$a^2(b-a)^2 \Phi_1^2 - a^2 ,$$

avremo $\Phi_1 = \pm \dfrac{1}{b-a}$, e cangiando eventualmente i segni di a , b, possiamo prendere

$$\Phi_1 = \frac{1}{b-a} .$$

Resta solo da soddisfare con H_2 , H_3 alle equazioni

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_1} = a H_2 \quad , \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = b H_3 \quad , \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = 0 ,$$

che integrate, e disponendo dei parametri u_2 , u_3 , dànno in fine

$$H_1 = 1 \quad , \quad H_2 = e^{a u_1} \quad , \quad H_3 = e^{b u_1} ;$$

e viceversa, con questi valori di H_1 , H_2 , H_3 , tutte le nostre condizioni sono soddisfatte.

Concludiamo adunque:

Se le tre curvature principali dello spazio curvo normale sono costanti e diseguali, una di esse k_1 è media proporzionale fra le altre due, e al ds^2 si può dare la forma

$$ds^2 = du_1^2 + e^{2au_1} du_2^2 + e^{2bu_1} du_3^2 ,$$

con a, b *costanti diseguali e con*

$$k_1 = -ab \quad , \quad k_2 = -b^2 \quad , \quad k_3 = -a^2 .$$

Si osserverà che, se si facesse $a = b$, lo spazio diventerebbe pseudosferico.

7. Esaurito il caso in cui le tre curvature principali sono diseguali, trattiamo ora quello in cui *due* siano supposte eguali: p. es. sia

$$k_2 = k_3 ,$$

indi $k_1 \neq k_2 , k_3$.

Riprendendo i primi risultati (nn. 1, 2), e ponendo, nelle (4), $k_2 = k_3$, risulta

$$\beta_{21} = \beta_{31} = 0$$

$$\frac{\beta_{12}}{H_2} = -\frac{\beta_{13}}{H_3} .$$

Introduciamo quindi una nuova funzione incognita λ, per la quale esprimiamo β_{12} , β_{13} colle formole

$$(12) \qquad \beta_{12} = H_2 \lambda \quad , \quad \beta_{13} = -H_3 \lambda \quad , \quad \beta_{21} = 0 \quad , \quad \beta_{31} = 0$$

Segue, dalle (a),

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_2} = \frac{\partial H_1}{\partial u_3} = 0 ,$$

cioè H_1 è indipendente da u_2 , u_3, e possiamo fare nuovamente $H_1 = 1$. Così le (a) si riducono alle seguenti:

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial u_1} = \quad H_2 \lambda \quad , \quad \dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} = \beta_{32} H_3 \\ \dfrac{\partial H_3}{\partial u_1} = -H_3 \lambda \quad , \quad \dfrac{\partial H_3}{\partial u_2} = \beta_{23} H_2 . \end{cases}$$

e le (b) alle altre

$$(13^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial (H_2 \lambda)}{\partial u_3} = -H_3 \lambda \, . \, \beta_{32} \quad , \quad \dfrac{\partial (H_3 \lambda)}{\partial u_2} = -H_2 \lambda \, \beta_{23} \\ \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_1} = 0 \qquad\qquad , \quad \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_1} = 0 . \end{cases}$$

Infine le (7) ci dànno le equazioni

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_2} + \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + (k_1 - \lambda^2) H_2 H_3 = 0 \\ -\dfrac{\partial (H_3 \lambda)}{\partial u_1} + k_2 H_3 = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial (H_2 \lambda)}{\partial u_1} + k_2 H_2 = 0 . \end{cases}$$

Le ultime due, combinate colle (13), diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_1} = \lambda^2 + k_2 \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_1} = -(\lambda^2 + k_2), \end{cases}$$

e dimostrano che si ha

$$\lambda^2 = -k_2 = \text{cost.}$$

Supposto, dapprima, che le due curvature eguali $k_2 = k_3$ non siano nulle, e per ciò anche λ sia una costante non nulla, paragonando le (13) con le (13*), viene

$$\beta_{23} = \beta_{32} = 0$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_2} = 0,$$

e inoltre

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_1} = H_2 \lambda \quad , \quad \frac{\partial H_3}{\partial u_1} = -H_3 \lambda .$$

Integrando e disponendo dei parametri u_1, u_2, u_3, abbiamo

$$H_1 = 1 \quad , \quad H_2 = e^{\lambda u_1} \quad , \quad H_3 = e^{-\lambda u_1},$$

ciò che è soltanto un caso particolare della forma (I) del ds^2, corrispondente al supporre

$$a = -b = \lambda .$$

8. Resta solo da considerare il caso in cui k_2, k_3 e λ siano nulli: nel qual caso, per le (13), (13*), H_2, H_3 e β_{23}, β_{32} sono indipendenti da u_1, e si hanno inoltre, come condizioni necessarie e sufficienti, le tre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_2}{\partial u_3} = \beta_{32} H_3 \quad , \quad \dfrac{\partial H_3}{\partial u_2} = \beta_{23} H_2 \\ \dfrac{\partial \beta_{23}}{\partial u_3} + \dfrac{\partial \beta_{32}}{\partial u_3} + k_1 H_2 H_3 = 0 . \end{cases}$$

In altri termini, H_2, H_3 sono assoggettate, come funzioni di u_2, u_3, unicamente alla condizione

$$-\frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u_3}\right)\right\} = k_1 ,$$

la quale esprime che la forma differenziale $H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$ deve avere la curvatura costante $= k_1$. E poichè in questo caso, avendosi $k_2 = k_3$, ogni

direzione sulle superficie $u_1 = \text{cost}$ è principale, potremo cangiare il sistema coordinato ortogonale (u_2, u_3) così da ridurre la forma

$$H_2^2 du_2^2 + H_3^2 du_3^2$$

alla forma tipica del quadrato dell'elemento lineare della sfera o della pseudosfera, secondo che $k_1 > 0$ o $k_1 < 0$. Ponendo nel primo caso $k_1 = a^2$, nel secondo $k_1 = -a^2$, ed essendo $H_1 = 1$, il ds^2 dello spazio potrà ridursi all'una o all'altra delle due forme

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + \text{sen}^2(au_2)\, du_3^2$$
$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + e^{2au_2} du_3^2 .$$

Come risultato finale dei nostri calcoli abbiamo dunque la proposizione seguente:

Esistono, oltre gli spazi a curvatura costante, tre soli tipi di spazî normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti, e questi sono definiti dalle tre rispettive espressioni pel ds^2

(I) $$ds^2 = du_1^2 + e^{2au_1} du_2^2 + e^{2bu_1} du_3^2$$

(II) $$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + \text{sen}^2(au_2)\, du_3^2$$

(III) $$ds^2 = du_1^2 + du_2^2 + e^{2au_2} du_3^2 ,$$

con a, b *costanti diseguali, non nulle. Le curvature principali* k_1, k_2, k_3 *hanno ordinatamente i valori*

$k_1 = -ab$, $k_2 = -b^2$, $k_3 = -a^2$ nel caso (I)
$k_1 = a^2$, $k_2 = k_3 = 0$ » (II)
$k_1 = -a^2$, $k_2 = k_3 = 0$ » (III).

Queste forme del ds^2 sono ben note, dalle mie ricerche citate al n. 1, come appartenenti a spazî con un gruppo continuo e transitivo di movimenti. Questo è un G_3 nel caso (I), ed è invece un G_4 sistatico nei casi (II) e (III).