ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Fisica Matematica. — *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell*. Nota II del Corrispondente O. TEDONE.

II.

9. CAMPO ELETTROMAGNETICO INDEFINITO. — Il problema della determinazione di un campo elettromagnetico indefinito, quando sieno date le condizioni iniziali e la distribuzione del vettore $\mathfrak{f}$, viene risoluto subito dalle formole precedenti facendo coincidere la varietà σ_3 con l'iperpiano $\tau = t_0$. Supponiamo, dapprima, di essere nel caso generale, ma che non esistano nel campo correnti di convezione. Chiamando con S la porzione dell'iperpiano $\tau = t_0$ compresa nella varietà conica caratteristica col vertice nel punto (x, y, z, t), con $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$ i valori di $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, dati sull'iperpiano stesso, e ponendo

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} 2^n \mathfrak{O}_1^{(n)} &= -\frac{c}{\mu}\,\mathfrak{E}_0(x, y, z)\,\mathrm{A}^{(n)}(t - t_0) - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} + k\right)\int_{\mathrm{S}} \mathfrak{H}_0\,\Omega^{(n)}\,d\mathrm{S} - \frac{c}{\mu}\,\mathrm{rot}\int_{\mathrm{S}} \mathfrak{E}_0\,\Omega^{(n)}\,d\mathrm{S}\right\}, \\ 2^n \mathfrak{O}_2^{(n)} &= -\frac{c}{\varepsilon}\,\mathfrak{H}_0(x, y, z)\,\mathrm{A}^{(n)}(t - t_0) + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\right)\int_{\mathrm{S}} \mathfrak{E}_0\,\Omega^{(n)}\,d\mathrm{S} + \frac{c}{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\int_{\mathrm{S}} \mathfrak{H}_0\,\Omega^{(n)}\,d\mathrm{S}\right\}, \end{aligned}\right.$$

possiamo scrivere

$$(27')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{c}{\mu}\,e^{k(t-t_0)}\,\mathfrak{E}(x, y, z, t) &= k^3 e^{-kt}\int_{t_0}^{t} e^{kt}\left(\mathfrak{O}_1^{(2)} + k\,\mathfrak{O}_1^{(3)}\right) dt - \\ &\quad - 2\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\right)\left(2\,\frac{\partial \mathfrak{O}_1^{(2)}}{\partial t} - k^2\,\mathfrak{O}_1^{(3)}\right) - k^2\,\mathfrak{O}_1^{(2)}, \\ \frac{c}{\varepsilon}\,e^{k(t-t_0)}\,\mathfrak{H}(x, y, z, t) &= k^3 e^{-kt}\int_{t_0}^{t} e^{kt}\left(\mathfrak{O}_2^{(2)} + k\,\mathfrak{O}_2^{(3)}\right) dt - \\ &\quad - 2\left(\frac{\partial}{\partial t} - k\right)\left(2\,\frac{\partial \mathfrak{O}_2^{(2)}}{\partial t} - k^2\,\mathfrak{O}_2^{(3)}\right) - k^2\,\mathfrak{O}_2^{(2)}. \end{aligned}\right.$$

10. Risolviamo, ora, lo stesso problema precedente nel caso in cui sia $k = 0$, ma si debba tener conto anche di correnti di convezione. In questa ipotesi abbiamo

$$(28)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}(x,y,z,t) = \mathfrak{E}_0(x,y,z) - \dfrac{4\pi}{\varepsilon}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathfrak{f}(x,y,z\tau)\,d\tau + \\ \quad + \dfrac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_S \mathfrak{H}_0 \dfrac{dS}{r} - \mathrm{rot}\displaystyle\int_S \mathfrak{E}_0 \dfrac{dS}{r} + \dfrac{4\pi}{\varepsilon}\,\mathrm{rot}\displaystyle\int_{S_4} \mathfrak{f}\,\dfrac{dS_4}{r} \right\}, \\ \mathfrak{H}(x,y,z,t) = \mathfrak{H}_0(x,y,z) - \\ \quad - \dfrac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_S \mathfrak{E}_0 \dfrac{dS}{r} + \mathrm{rot}\displaystyle\int_S \mathfrak{H}_0 \dfrac{dS}{r} - \dfrac{4\pi}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{S_4} \mathfrak{f}\,\dfrac{dS_4}{r} \right\}. \end{cases}$$

Se ω indica una sfera di raggio uno col centro nel punto (x, y, z) dello spazio ordinario, può tenersi presente che

$$\int_S \ldots dS = \int_\omega d\omega \int_0^{C(t-t_0)} \ldots r^2\,dr \quad , \quad \int_{S_4} \ldots dS_4 = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_\omega d\omega \int_0^{C(\tau - t_0)} \ldots r^2\,dr\,.$$

Tutte le nostre formole sono conseguenze delle sole prime due equazioni (6) e valgono, quindi, qualunque sieno $\mathfrak{E}_0$ ed $\mathfrak{H}_0$. Se si vuole che sia soddisfatta anche la terza delle (1), basta supporre che sia $\mathrm{div}\,\mathfrak{H}_0 = 0$.

Le formole trovate sono molto semplici. Forse ad esse si può rimproverare di essere estranee a qualunque intuizione fisica; questo rimprovero, però, non ci pare sostanziale. Di qualche interesse può essere, invece, la constatazione che esse formole possono costituire la base più ampia e sicura per la risoluzione degli svariati problemi a cui dànno luogo l'elettromagnetismo, la meccanica dell'elettrone e la teoria elettromagnetica della luce.

III.

11. Principio di Huygens. — Di un principio di Huygens, nella teoria della propagazione delle onde elettromagnetiche, si può parlare soltanto se il mezzo in cui queste onde si propagano non è assorbente, ossia se la sua conducibilità è nulla. In ogni altro caso si può concedere che un tale principio valga solo in via approssimata. Supporremo dunque $\lambda = k = 0$.

Ciò posto, chiamiamo S una regione finita dello spazio ordinario limitata dalla superficie σ che, all'istante t, possiamo immaginare come una regione dell'iperpiano $\tau = t$ del nostro spazio a quattro dimensioni; e supponiamo che a nessun istante di ogni intervallo di tempo, che ci occorrerà di considerare, S sia attraversata, o soltanto toccata, da alcuna massa elettrica in movimento. Introduciamo la varietà cilindrica a tre dimensioni dello spazio (ξ, η, ζ, τ) che ha per direttrice la superficie σ e per generatrici le parallele all'asse τ condotte per i punti di σ stessa; e supponiamo che la varietà σ_3 che compare nelle (26′), sia formata dalla regione S dell'iperpiano $\tau = t_0$, essendo t_0 l'istante iniziale, e dalla porzione della varietà cilindrica precedente, sulla quale $\tau > t_0$. Applicheremo quindi le (26′) nella ipotesi che la coordinata t del vertice della varietà conica caratteristica sia così grande che questa varietà caratteristica incontri l'iperpiano $\tau = t_0$ in punti che sieno tutti esterni ad S. Avremo allora subito, intanto,

$$4\pi \mathfrak{E}(x, y, z, t) = 4\pi \mathfrak{E}_0(x, y, z) - \mathrm{rot}^2 \int_S \frac{\mathfrak{E}_0}{r}\, dS -$$

$$- \mathrm{rot} \int_\sigma \left[\mathfrak{E}\left(t - \frac{r}{C}\right) \wedge \mathrm{n} \right] \frac{d\sigma}{r} - \frac{c}{\varepsilon}\, \mathrm{rot}^2 \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \int_{t_0}^{t-\frac{r}{C}} (\mathfrak{H} \wedge \mathrm{n})\, d\tau$$

in cui con $\mathfrak{E}_0$ ed $\mathfrak{H}_0$ intendiamo di rappresentare anche adesso i valori di $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ all'istante $t = t_0$, ed n è un vettore unitario normale a σ diretto verso l'interno di S. Inoltre, per brevità, delle variabili da cui dipendono le quantità sotto i segni integrali, scriviamo solo il valore di τ, quando questo non è generico.

Tenendo conto, ora, che, essendo $\mathfrak{A}$ un vettore qualunque funzione di ξ, η, ζ, τ,

$$\mathrm{rot}^2 \mathfrak{A} = \mathrm{grad\, div}\, \mathfrak{A} - \Delta^2 \mathfrak{A}$$

dove con $\Delta^2 \mathfrak{A}$ rappresentiamo il vettore le cui componenti si ottengono eseguendo l'operazione Δ^2 sulle componenti del vettore $\mathfrak{A}$, si trova

$$4\pi \mathfrak{E}_0(x, y, z) - \mathrm{rot}^2 \int_S \frac{\mathfrak{E}_0}{r}\, dS = - \mathrm{grad\, div} \int_S \frac{\mathfrak{E}_0}{r}\, dS,$$

$$- \frac{c}{\varepsilon}\, \mathrm{rot}^2 \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \int_{t_0}^{t-\frac{r}{C}} (\mathfrak{H} \wedge \mathrm{n})\, d\tau = \frac{c}{\varepsilon}\, \Delta^2 \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \int_{t_0}^{t-\frac{r}{C}} (\mathfrak{H} \wedge \mathrm{n})\, d\tau -$$

$$- \frac{c}{\varepsilon}\, \mathrm{grad\, div} \int_\sigma \frac{d\sigma}{r} \int_{t_0}^{t-\frac{r}{C}} (\mathfrak{H} \wedge \mathrm{n})\, d\tau =$$

$$= \frac{\mu}{c} \int_\sigma \left[\mathfrak{H}'\left(t - \frac{r}{C}\right) \wedge \mathrm{n} \right] \frac{d\sigma}{r} - \frac{c}{\varepsilon}\, \mathrm{grad\, div} \int_S \frac{dS}{r} \int_{t_0}^{t-\frac{r}{C}} \mathrm{rot}\, \mathfrak{H}\, d\tau.$$

L'ultimo termine, a causa delle equazioni di Maxwell, si riduce, inoltre, a

$$-\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_S \frac{dS}{r}\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)-\mathfrak{E}_0\right]$$

e gli accenti, sui simboli $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, indicano derivate dei corrispondenti vettori rispetto a τ.

Tenendo conto dei risultati analoghi relativi all'equazione che dà il vettore $\mathfrak{H}$, potremo scrivere

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned}
4\pi\mathfrak{E}(x,y,z,t) &= -\operatorname{rot}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}+\\
&+\frac{\mu}{c}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}'\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_S\frac{dS}{r}\,\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right),\\
4\pi\mathfrak{H}(x,y,z,t) &= -\operatorname{rot}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\\
&-\frac{\varepsilon}{C}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}'\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_S\frac{dS}{r}\,\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right).
\end{aligned}\right.$$

Le equazioni (29) sussistono indipendentemente da ogni ipotesi sulle divergenze di $\mathfrak{E}$ e di $\mathfrak{H}$. Se si tien conto, però, che $\operatorname{div}\mathfrak{H}=0$ e si trascura il potenziale elettrostatico, dato che nel campo sussista una distribuzione statica di elettricità, possiamo dare alle (29) la forma seguente

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}
4\pi\mathfrak{E}(x,y,z,t) &= -\operatorname{rot}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}+\\
&+\frac{\mu}{c}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}'\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\times \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r},\\
4\pi\mathfrak{H}(x,y,z,t) &= -\operatorname{rot}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\\
&-\frac{\varepsilon}{c}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}'\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\times \mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}.
\end{aligned}\right.$$

Queste equazioni rappresentano il principio di Huygens per le onde elettromagnetiche. In esse il punto (x,y,z) è supposto interno alla superficie σ; però questa superficie potrebbe, evidentemente, essere composta di più pezzi: p. es., di due pezzi σ e σ', uno interno all'altro. Ammesso, allora, σ' esterno a σ e che, se il campo si estende all'infinito, il campo sia evanescente all'infinito al modo solito, facendo tendere i punti di σ' all'infinito, si trova subito, che le (30) valgono anche se il punto (x, y, z) è esterno alla superficie σ. Si richiede soltanto che questo punto sia separato per mezzo di σ da tutti i sistemi di elettroni che con le loro vibrazioni generano il campo.

I punti intorno ai quali vibrano gli elettroni di ciascun sistema, possono indicarsi col nome di *centri di scuotimento elettromagnetico primitivi*, ed allora si potran chiamare *centri di scuotimento elettromagnetico secondarii* i centri di scuotimento reali, o fittizii, che bisogna immaginare distribuiti nell'etere e sulla superficie σ e che sostituiscono l'effetto dei centri di scuotimento primitivi. Si può quindi dire che lo stato elettromagnetico in un punto (x, y, z) si può sempre immaginare determinato da un sistema di centri elettromagnetici secondarii distribuiti con continuità su una superficie σ fissa, arbitraria, separante il punto (x, y, z) dai centri di scuotimento primitivi; ed, all'istante t, lo stato elettromagnetico, nel punto (x, y, z), è dovuto soltanto alle condizioni elettromagnetiche in cui si trovavano gli elementi $d\sigma$ di σ, distanti di r dal punto (x, y, z), agli istanti $t - \frac{r}{C}$. Le onde elettromagnetiche si propagano con la velocità C.

12. Il principio di Huygens immaginato, dapprima, per spiegare la propagazione delle onde luminose, è stato, ad ogni modo, il prodotto di una felice intuizione avente di mira onde longitudinali che sono, forse, le sole accessibili, in qualche maniera, ad una intuizione non armata di mezzi analitici efficaci. E, come accade quasi sempre per i prodotti della intuizione pura, ha portato lungamente con sè traccie di oscurità e di paradossi che han dato luogo a polemiche e a discussioni ben note, fino a quando la quistione non è andata completamente a posto con la scoperta della celebre formola di Kirchhoff. Questa è, parmi, l'opinione corrente. Si può, però, osservare che, se anche l'ordinaria trattazione del principio di Huygens con l'aiuto della formola di Kirchhoff, si può ritenere sufficiente per onde longitudinali, non si possa dire, assolutamente, la stessa cosa quando si tratta di onde trasversali. Qualunque sia, infatti, la teoria dei fenomeni luminosi che si invoca, il principio in discorso si applica, sempre nella stessa forma, alle componenti del *vettore luce* ragionando su centri di scuotimento le cui vibrazioni sono caratterizzate da funzioni della forma $\frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{C}\right)$ le quali, se caratterizzano assai bene centri di scuotimento producenti onde longitudinali, non possono rappresentare nessuna propagazione di onde trasversali, p. es., di onde elettromagnetiche. La trattazione ordinaria del principio di Huygens, anche nel campo dei fenomeni luminosi, con l'aiuto della formola di Kirchhoff, se non è errata dal punto di vista analitico, appare formale e priva di forza di persuasione. Queste considerazioni mi permettono di sperare che la fatica fatta per trovare le formole (30) non andrà completamente perduta.