# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXV.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

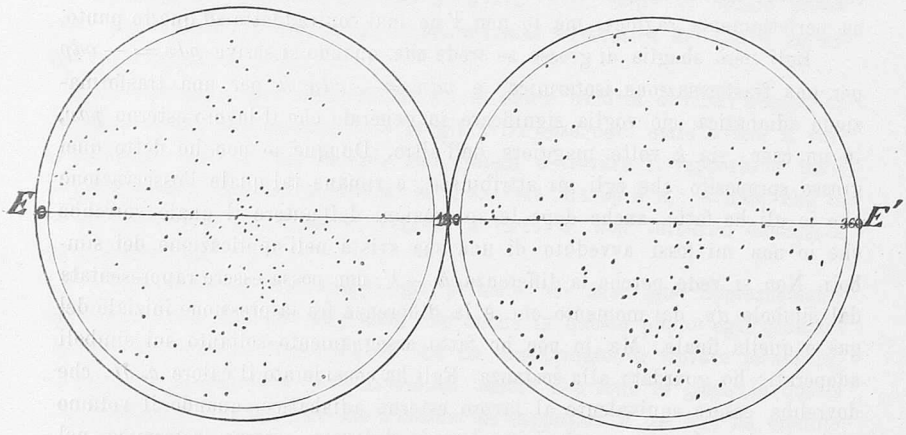
in taluni casi ammettersi; ma il risultato non sarà mai esatto. Perciò, dicevo, se l'autore ha trovato una formola esatta, è perchè si è servito di una formola approssimata per esprimere il lavoro, di un'altra formola approssimata per esprimere il rapporto $k$. Sapendo già qual'era il risultato che si doveva ottenere, era facile vedere quali semplificazioni ulteriori occorrevano per far sì che una delle approssimazioni compensasse l'altra. E questo è ciò che io volevo dire, e non trovo motivo di mutar di parere.

Astro-fisica. — *Relazione fra la corona e le protuberanze solari.* Nota del Socio A. Riccò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica celeste. — *Sopra un'ipotesi del Pickering relativa alla frequenza degli afeli delle orbite cometarie nelle vicinanze dell'antiapice.* Nota di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. In un recente lavoro [1] il prof. A. S. Eddington, studiando la posizione degli afeli delle orbite cometarie a lungo periodo, ottiene il diagramma che qui riportiamo, e nel quale abbiamo indicato con EE' l'eclittica.




*Sebbene il fatto non risulti troppo evidente*, l'autore crede di scorgervi un addensamento degli afeli nelle vicinanze dell'antiapice, per spiegare il

[1] The Observatory, vol. XXXVI, 1913.

quale ricorre alla seguente ipotesi del Pickering: « *Pickering has suggested that the action of an interstellar resisting medium has had an effect on the distribution of afelia, tending to make the aphelia fall behind the Sun in its motion through the space. Supposing that a bright comet with a large gaseous envelope would be more affected by the resistance than a faint one, he accounts in this way for the group of aphelia of bright comets, which is fairly near the antapex of the Sun's motion* [1].

Prescindendo da gravi difficoltà fisiche (esperienze di Michelson e Morley) e concettuali (esistenza del moto assoluto), contro cui sembra urtare l'ipotesi del Pickering, noi ci proponiamo di esaminarla col calcolo. Vedremo che il risultato sarà contrario al mantenimento dell'ipotesi stessa.

2. Supponiamo la resistenza del mezzo proporzionale alla prima potenza della velocità. Allora chiamando, in simboli vettoriali, con $\widetilde{V}$ la velocità di traslazione del sistema solare nello spazio e con $\widetilde{v}$ la velocità della cometa rispetto al Sole, e indicando con $\varrho$ un coefficiente opportunamente scelto, la cometa risulterà perturbata da due forze $\widetilde{\Phi} = -\varrho\widetilde{V}$, e $\widetilde{\psi} = -\varrho\widetilde{v}$. Essendo la resistenza del mezzo estremamente debole, noi potremo, secondo i metodi approssimati della meccanica celeste, studiare separatamente gli effetti parziali delle due forze $\widetilde{\Phi}$ e $\widetilde{\psi}$, e comporre poi i risultati. Ora l'effetto di $\widetilde{\psi}$ è ben noto, consistendo in una diminuzione dell'eccentricità e in un aumento del moto medio, *senza perturbazioni secolari della linea degli apsidi* [1] *e senza alcuna variazione dell'inclinazione.*

*Se noi ci limitiamo quindi alle perturbazioni secolari (le uniche importanti per la nostra ricerca), potremo considerare solamente la forza* $\widetilde{\Phi}$, *come se la* $\widetilde{\psi}$ *non esistesse.*

3. Osserviamo, anzitutto, che il problema del moto di un punto attratto con la legge di Newton da un centro fisso, e sollecitato inoltre da una forza $\widetilde{\Phi}$ costante in grandezza e direzione (perchè $\widetilde{V}$ è costante), si riconduce alle quadrature [2]. Però, poichè a noi importa solo di esaminare se un'ipotesi soddisfa o no alle osservazioni, è assai più breve usare i metodi classici della meccanica celeste. La diminuzione di esattezza, che a prima vista potrebbe temersi, è in realtà solo apparente; infatti noi già ci siamo

[1] Ivi, pag. 146.

[1] Tisserand. *Traité de Méc. Cél.*, tomo IV, pp. 217 e segg.

[2] Cfr Ch. Céllerier, *Note sur une question de Mécanique*, in Bull. des Sciences Math., 1891; M. A. de Saint-Germain, *Mouvement d'un point pesant attiré par un point fixe suivant la loi de Newton*, in Nouvelles Ann. de Math., 1892, ecc. Il problema, del resto, è un caso particolare di quello del moto di un punto attratto da due centri fissi, problema classico già risoluto da Eulero e Lagrange.

posti nel campo delle approssimazioni, avendo stabilito di studiare separatamente gli effetti delle due forze $\widetilde{\Phi}$ e $\widetilde{\psi}$.

4. Per provare che l'ipotesi del Pickering soddisfa alle osservazioni, occorrerebbe dimostrare che la forza $\widetilde{\Phi}$:

*a*) tende a spostare il piano dell'orbita cometaria in modo da farlo passare per l'antiapice A;

*b*) tende a far muovere l'afelio in modo da portarlo sulla semiretta *s* congiungente il Sole S con l'antiapice A.

Esaminiamo separatamente le due questioni.

5. Prendiamo come piano fondamentale, P, un piano passante pel Sole e normale alla retta congiungente il Sole stesso con l'antiapice; e chiamiamo con $f$, $\vartheta$, $i$, $a$, $e$, $n$, $\omega$, $w$, $u$, $\varepsilon$ il coefficiente attrattivo, il nodo ascendente e l'inclinazione (rispetto a P), il semiasse maggiore, l'eccentricità ($e < 1$, trattandosi di comete periodiche), il moto medio, il perielio, l'anomalia vera ed eccentrica, e l'epoca. La componente di $\widetilde{\Phi}$ secondo la normale al piano dell'orbita (dalla parte di A) sarà allora $F_3 = \varrho V \cos i$. Servendoci delle equazioni delle perturbazioni nel metodo di Gauss e facendo attenzione al fatto che il Tisserand [1] rappresenta la forza analoga con $fm'W$, avremo, posta uguale allo zero la massa $m$ della cometa,

$$\frac{di}{\cos i} = \frac{\varrho V ar}{f\sqrt{1-e^2}} \cos(w + \omega - \vartheta)\, n\,dt\,, \tag{1}$$

Ma si ha, come è notissimo,

$$r = a(1 - e\cos u) \tag{2}$$

$$nt = u - e \operatorname{sen} u - \varepsilon + \omega \tag{3}$$

$$\operatorname{sen} w = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos u} \operatorname{sen} u \quad ; \quad \cos w = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}\,. \tag{4}$$

Volendo limitarci alle *perturbazioni di primo ordine*, sostituiamo questi valori nel secondo membro della (1) *supponendo, al solito, che* $n$, $a$, $e$, $\omega$, $\vartheta$ *siano costanti durante una rivoluzione*. Otterremo, con brevi calcoli,

$$\frac{di}{\cos i} = \frac{\varrho V a^2}{f\sqrt{1-e^2}} (1 - e\cos u) \times$$
$$\times \left\{ (\cos u - e)\cos(\omega - \vartheta) - \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} u \operatorname{sen}(\omega - \vartheta) \right\} du\,. \tag{5}$$

[1] Tisserand, op. cit., tomo I, pag. 433.

Per ottenere la variazione di $i$ durante una rivoluzione, integriamo da $u = 2K\pi$ ad $u = 2(K+1)\pi$ dove K è un numero qualsiasi (non necessariamente intero). Indicando con $i_1$ ed $i_2$ i valori iniziali e finali di $i$, avremo:

$$\log \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{i_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{i_1}{2}\right)} = -3\,\frac{\varrho V a^2 \pi e}{f\sqrt{1-e^2}} \cos(\omega - \vartheta)\,. \tag{6}$$

Dalla (6), applicando il procedimento iterativo vediamo che $i$ non tende sempre a $\pm\frac{\pi}{2}$ come suppone il Pickering. Infatti nel caso generale, il $\cos(\omega - \vartheta)$ può cambiar di segno ecc. ecc. Pure, volendo concedere il possibile all'ipotesi dell'illustre astronomo inglese, prescindiamo per ora da queste difficoltà e supponiamo che il piano dell'orbita si disponga normalmente a P. Esaminiamo allora se, sotto l'azione della forza $\widetilde{\Phi}$, l'afelio verrebbe a portarsi sulla semiretta $s$, come egli mostra di credere.

6. Supposto dunque che il piano dell'orbita sia divenuto normale a P, o, ciò che è lo stesso, passi per la semiretta $s$ congiungente il Sole con l'antiapice, *contiamo gli angoli* $\omega, w, u$ *da* $s$ *procedendo nel senso del moto della cometa.* Le componenti $F_1$ ed $F_2$ di $\Phi$, lungo il raggio vettore $r$ e la sua normale diretta nel senso del moto e giacente sul piano dell'orbita, saranno allora:

$$F_1 = \varrho V \cos(w+\omega) \quad ; \quad F_2 = -\varrho V \operatorname{sen}(w+\omega)\,. \tag{7}$$

Servendoci delle equazioni di Gauss e facendo attenzione al fatto che il Tisserand chiama $F_1$ ed $F_2$ con $fm'S$ ed $fm'T$, avremo, posta uguale allo zero la massa $m$ della cometa,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\varrho V}{fe}\, a^2 n \sqrt{1-e^2} \times \tag{8}$$
$$\times \left\{ \cos w \cos(w+\omega) + \left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)}\right] \operatorname{sen} w \operatorname{sen}(w+\omega) \right\}.$$

Ora abbiamo identicamente:

$$\cos w \cos(w+\omega) + \left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)}\right] \operatorname{sen} w \operatorname{sen}(w+\omega) = \tag{8^{bis}}$$
$$= \cos\omega + \frac{r}{a(1-e^2)} \operatorname{sen} w \operatorname{sen}(w+\omega) =$$
$$= \left(1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \operatorname{sen}^2 w\right) \cos\omega + \frac{r}{a(1-e^2)} \operatorname{sen} w \cos w \operatorname{sen}\omega\,.$$

Servendoci delle (2) (3) (4) e considerando $a$ $e$ $n$ $\omega$ $\varepsilon$ come costanti durante una rivoluzione, poichè noi ci limitiamo alle perturbazioni di primo ordine, avremo:

$$(9) \qquad d\omega = -\frac{\varrho V}{fe} a^2 \sqrt{1-e^2} \times$$

$$\left\{ (1 - e\cos u + \operatorname{sen}^2 u)\cos\omega + \frac{\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} u (\cos u - e) \right\} du.$$

Integrando al solito tra $u = 2(K+1)\pi$, troveremo, per il valore della variazione di $\omega$ durante una rivoluzione,

$$(10) \qquad \Delta\omega = -3\pi \frac{\varrho V}{fe} a^2 \sqrt{1-e^2} \cos\omega;$$

da cui deduciamo, con procedimento iterativo, che $\omega$ tende verso $-\frac{\pi}{2}$ [1].

Ricordando che contiamo gli angoli da $s$, possiamo affermare quanto segue:

*Tenendo conto delle sole perturbazioni di primo ordine, gli afeli delle orbite cometarie periodiche tenderebbero ad addensarsi non già verso l'antiapice (come suppone il Pickering) ma piuttosto lungo un cerchio massimo avente per poli l'apice e l'antiapice.*

7. Inutile aggiungere che i nostri risultati sono semplicemente approssimati, poichè ci siamo limitati alle sole perturbazioni di primo ordine. Ciò non ostante, essi sono sufficienti per un lungo spazio di tempo, data l'estrema debolezza della ipotetica resistenza del mezzo. D'altra parte, sapendosi, da note teorie, che la vita di una cometa è limitata, sarebbe stato inutile ricorrere, per l'esame del problema fisico, a calcoli più complicati. Alle perturbazioni ora trovate non occorre poi aggiungere quelle prodotte dalla forza $\widetilde{\psi}$, giacchè essa non altera le inclinazioni e non produce perturbazioni secolari su $\omega$, come è stato osservato.

Se invece avessimo ricondotto il problema alle quadrature, secondo quanto si era detto al § 3, il risultato sarebbe stato il seguente. La cometa nel suo moto relativo rispetto al Sole, ripassa infinite volte vicina quanto si vuole ad ogni posizione da essa precedentemente assunta. Il risultato non è in contradizione con quello da noi ora ottenuto giacchè, come è noto le perturbazioni secolari sono in realtà perturbazioni periodiche estremamente lente. Esso mostra invece che la forza $\widetilde{\Phi}$ non basta a spiegare l'addensamento degli afeli verso l'antiapice.

[1] Si vedrebbe anche facilmente che $\omega = \frac{\pi}{2}$ corrisponde ad una posizione di equilibrio *instabile*, ed $\omega = -\frac{\pi}{2}$ ad una posizione di equilibrio *stabile*: ben inteso limitandoci a considerare le perturbazioni di primo ordine.

8. Concludendo, *l'ipotesi del « vento d'etere » del Pickering non solo ci sembra urtare contro gravi difficoltà fisiche e concettuali, ma ci risulta anche insufficiente a spiegare i fenomeni. Crediamo quindi che essa vada abbandonata.*

9. Qualora dunque la statistica cometaria mettesse in luce, in maniera non dubbia, un notevole addensamento degli afelii nelle vicinanze dell'antiapice, per spiegare il fatto occorrerebbe ricorrere ad altre ipotesi. Tra queste la più semplice consisterebbe forse nel supporre che molte di quelle comete provengano da stelle della costellazione dell'Ercole o della Lira. Infatti il chmo prof. Burgatti, fondandosi sulla teoria delle superfici-limiti di Hill, ha recentemente dimostrato che, se una cometa proviene da qualche stella, la sua orbita sembra avere l'afelio in quelle vicinanze *e può avere carattere ellittico anche a grande distanza dal Sole* [1].

## Matematica. — *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni, delle superficie, di specie superiore.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Se si esamina qualitativamente il fin qui fatto nella geometria differenziale (proiettiva o metrica) degli iperspazî, si constata che, salvo in alcuni recenti lavori, gli enti studiati sono generalmente le curve e le ipersuperficie; ben di rado accade di trovare proprietà dei numerosi enti di dimensioni intermedie. Si può dire, *grosso modo*, che le proprietà note in $S_n$ si trovano facendo variare l'indice $i$ delle coordinate $x_i$ da 1 ad $n$, invece che da 1 a 3; come più facilmente prevedibili, interessano anche meno.

Vero è che per codeste varietà intermedie vengono a mancare gli elementi ai quali si riferiscono le proprietà delle superficie dello spazio ordinario; e in questo senso la ricerca è chiusa negativamente. Per renderla possibile bisognerà cominciare dalla ricerca degli elementi che hanno sulla

[1] Ved. *Osservazioni sull'origine delle comete.* Nota letta alla R. Accademia delle Scienze di Bologna, il 23 maggio 1915, dal prof. P. Burgatti. Tra i risultati importanti di questa bella Memoria del prof. Burgatti, vi è anche l'esser riuscito a mettere d'accordo le considerazioni sintetiche dello Schiaparelli coi calcoli del Laplace, a prima vista discordanti tra loro. Nella mia precedente Nota: *Esame analitico sulla teoria del Fabry e Crommelin sull'origine delle comete* (Rendic. Lincei, 1914, 1° sem., 5° fasc.) *io sostenni l'idea della provenienza stellare di alcune comete*, mostrando che anche in questo caso *« la probabilità di scoprirne una con orbita fortemente iperbolica sarebbe pressochè nulla »* (pag. 310).

Quanto abbiamo detto nella presente Nota, *è una nuova conferma di questa tesi.* Infatti, avendo ora esclusa la spiegazione del Pickering, se si ammette la maggior frequenza degli afeli nella regione dell'antiapice, conviene ricorrere per darne ragione all'ipotesi della provenienza stellare.