ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

8. Concludendo, *l'ipotesi del « vento d'etere » del Pickering non solo ci sembra urtare contro gravi difficoltà fisiche e concettuali, ma ci risulta anche insufficiente a spiegare i fenomeni. Crediamo quindi che essa vada abbandonata.*

9. Qualora dunque la statistica cometaria mettesse in luce, in maniera non dubbia, un notevole addensamento degli afelii nelle vicinanze dell'antiapice, per spiegare il fatto occorrerebbe ricorrere ad altre ipotesi. Tra queste la più semplice consisterebbe forse nel supporre che molte di quelle comete provengano da stelle della costellazione dell'Ercole o della Lira. Infatti il chmo prof. Burgatti, fondandosi sulla teoria delle superfici-limiti di Hill, ha recentemente dimostrato che, se una cometa proviene da qualche stella, la sua orbita sembra avere l'afelio in quelle vicinanze *e può avere carattere ellittico anche a grande distanza dal Sole* [1].

Matematica. — *Basi analitiche per una teoria delle deformazioni, delle superficie, di specie superiore.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Se si esamina qualitativamente il fin qui fatto nella geometria differenziale (proiettiva o metrica) degli iperspazî, si constata che, salvo in alcuni recenti lavori, gli enti studiati sono generalmente le curve e le ipersuperficie; ben di rado accade di trovare proprietà dei numerosi enti di dimensioni intermedie. Si può dire, *grosso modo*, che le proprietà note in S_n si trovano facendo variare l'indice i delle coordinate x_i da 1 ad n, invece che da 1 a 3; come più facilmente prevedibili, interessano anche meno.

Vero è che per codeste varietà intermedie vengono a mancare gli elementi ai quali si riferiscono le proprietà delle superficie dello spazio ordinario; e in questo senso la ricerca è chiusa negativamente. Per renderla possibile bisognerà cominciare dalla ricerca degli elementi che hanno sulla

[1] Ved. *Osservazioni sull'origine delle comete*. Nota letta alla R. Accademia delle Scienze di Bologna, il 23 maggio 1915, dal prof. P. Burgatti. Tra i risultati importanti di questa bella Memoria del prof. Burgatti, vi è anche l'esser riuscito a mettere d'accordo le considerazioni sintetiche dello Schiaparelli coi calcoli del Laplace, a prima vista discordanti tra loro. Nella mia precedente Nota: *Esame analitico sulla teoria del Fabry e Crommelin sull'origine delle comete* (Rendic. Lincei, 1914, 1° sem., 5° fasc.) *io sostenni l'idea della provenienza stellare di alcune comete*, mostrando che anche in questo caso *« la probabilità di scoprirne una con orbita fortemente iperbolica sarebbe pressochè nulla »* (pag. 310).

Quanto abbiamo detto nella presente Nota, *è una nuova conferma di questa tesi.* Infatti, avendo ora esclusa la spiegazione del Pickering, se si ammette la maggior frequenza degli afeli nella regione dell'antiapice, conviene ricorrere per darne ragione all'ipotesi della provenienza stellare.

varietà un ufficio analogo a quelli noti per le superficie di S_3, e poi estendere ad essi le proprietà note [1].

Questo piano di ricerca porta generalmente a passare ad intorni di un punto di ordine più elevato che quelli occorrenti in S_3; in senso metrico, ad occuparsi di curvature d'ordine abbastanza alto.

Ma, siccome parlare di proprietà di un ente non ha senso se non quando si sia fissato il gruppo rispetto al quale si considera, è naturale che si sia portati ad esaminare gruppi diversi da quelli classici per lo studio delle superficie in S_3 (gruppo delle rappresentazioni conformi, dell'applicabilità o delle deformazioni per flessione, dei movimenti): gruppi che, al pari degli elementi su cui operano, possono non esistere in S_3.

2. Le superficie (V_2) di S_n ($n > 3$) sono state studiate, rispetto al gruppo dei movimenti, dal prof. E. E. Levi [2]: un sistema di forme a più variabili prende il posto delle due classiche forme quadratiche fondamentali; gli invarianti assoluti della superficie sono gli invarianti simultanei di questo sistema di forme.

Io mi occupo qui delle superficie rispetto a quel gruppo di trasformazioni (che dirò *deformazioni di specie* ν) che lasciano invariati l'elemento lineare e le prime $\nu - 1$ curvature di tutte le curve della superficie [3]: si intende che la dimensione dell'ambiente deve essere abbastanza alta perchè questo nuovo gruppo non coincida con quello dei movimenti.

3. Siccome due superficie equivalenti rispetto al gruppo sono per lo meno applicabili ($\nu \geq 1$), sarà fissata (nel caso generico) la corrispondenza fra i loro punti dall'uguaglianza della curvatura e di un suo parametro differenziale; quindi potremo sempre supporre che a punti corrispondenti si siano già date le stesse coordinate curvilinee u, v.

4. Per prepararci all'esame del caso generale, vediamo se esistano curve di una superficie che in una determinata flessione conservino la loro prima curvatura.

[1] Vedasi per es. una mia Nota recente: *Analisi metrica delle quasi-asintotiche sulle superficie degli iperspazi* (questi Rendiconti, 1° semestre 1916), ove trovansi altre citazioni.

[2] *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio* (Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. IX), che citerò con « Tesi ». È questo l'unico lavoro organico sulle superficie degli iperspazi. Oltre alla ricerca degli invarianti atti a determinare la superficie nel gruppo dei movimenti, esso contiene l'estensione a curvature d'ordine qualsiasi di una curva di una V_m del teorema di Meusnier e l'interpretazione geometrica degli invarianti assoluti; poi alcune cose, meno interessanti, sulle superficie minime.

[3] Ho già esposto alcuni resultati, in questo indirizzo, nella Nota *Problemi nuovi di geometria metrico-differenziale* (questi Rendiconti, vol. XXIV, serie 5ª, 1° sem. 1915, fasc. 12).

Siano le $x_i(u,v)$ le coordinate cartesiane ortogonali di un punto della superficie di partenza; $\overline{x}_i(u,v)$ quelle del punto corrispondente sulla deformata. S'individua una curva su di esse ponendo $u=u(t)$, $v=v(t)$; la prima curvatura in un suo punto si ha da

$$1/\varrho_1^2 = M_2 \Big/ \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 ,$$

ove

$$M_2 = \left\| \begin{matrix} x_i^{(10)} u' + x_i^{(01)} v' \\ x_i^{(20)} u'^2 + 2 x_i^{(11)} u' v' + x_i^{(02)} v'^2 + \\ + x_i^{(10)} u'' + x_i^{(01)} v'' \end{matrix} \right\|^2 , \quad x_i^{(hk)} = \frac{\partial^{h+k} x_i}{\partial u^h \partial v^k} \quad (i=1,\dots,n)$$

e ds è l'elemento d'arco; siccome le due superficie si suppongono applicabili, basta confrontare M_2 su di esse. Questo determinante è del tipo $AC - B^2$, ove A è la solita forma quadratica fondamentale

$$E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 ,$$

già supposta invariante, con

$$E = I_{1010} = \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 ,$$

$$F = I_{1001} = I_{0110} = \sum_{1 \cdot i}^n \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} , \quad G = I_{0101} = \sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 .$$

Poniamo in generale

$$\sum_1^n x_i^{(hk)} x_i^{(lm)} = I_{hklm} = I_{lmhk} = [hklm] = [lmhk] \ (^1) ;$$

si vede subito che in B entrano come coefficienti di u', v' i simboli

$$[1020] , [0120] , [1002] , [0102] , [1011] , [0111]$$

i quali, si verifica subito, sono esprimibili mediante le derivate prime di E, F, G, quindi invarianti nella flessione. I coefficienti di u'', v'' in B sono E, F, G stesse.

Esaminiamo C. I coefficienti dei termini quadratici in u'', v'' sono E, F, G; i coefficienti dei termini lineari in u'', v'' si esprimono coi simboli precedenti; infine i termini in u', v' soltanto figurano nella forma

$$[2020]\, u'^4 + 4[2011]\, u'^3 v' + 2\{2[1111] + [2002]\}\, u'^2 v'^2 + \\ + 4[0211]\, u' v'^3 + [0202]\, v'^4 .$$

(1) La notazione con gli I è del Levi (loc. cit.): mi servo dell'altra perchè è tipograficamente più economica, e uso la parentesi quadra per non far nascere confusione coi simboli di Riemann.

È chiaro che l'uguaglianza della curvatura in punti corrispondenti delle due curve si traduce nell'uguaglianza di questa forma con l'analoga costruita per la superficie trasformata; alla forma precedente si può sostituire l'altra

$$[2020]\, u'^4 + 4[2011]\, u'^3 v' + 6\,[2002]\, u'^2 v'^2 + 4\,[1102]\, u' v'^3 + [0202]\, v'^4$$

perchè

$$\frac{\partial}{\partial u}[1101] - \frac{\partial}{\partial v}[2001] = \frac{\partial}{\partial v}[1110] - \frac{\partial}{\partial u}[0210] = [1111] - [2002].$$

Quindi esistono, per ogni punto, quattro curve che conservano la prima curvatura in una flessione assegnata della superficie; a meno che non conservino la prima curvatura tutte le curve della superficie, nel qual caso sono invarianti tutti i simboli

$$[2020]\ ,\ [2011]\ ,\ [2002]\ ,\ [1102]\ ,\ [0202]\,.$$

In S_3 l'invarianza di questi simboli porta, com'era prevedibile, ai movimenti della superficie; ma negli spazî superiori esistono effettivamente queste deformazioni non ridotte a movimenti.

5. Cerchiamo le condizioni per una deformazione di specie ν. Richiamiamo alcune definizioni e proprietà dei simboli $[hklm]$ (¹). Si dice *ordine* del simbolo il maggiore dei due numeri $h+k$, $l+m$ (è l'ordine massimo delle derivate che vi figurano). Si dice che un *simbolo* è *principale* se per esso si ha $h+k=l+m$; gli altri simboli si dicono *dedotti*, perchè con derivazioni dai simboli principali di ordine $\leq s$ si possono ricavare i simboli dedotti di ordine $\leq s+1$. Ricordiamo ancora la formola che dà la $(\nu-1)$-esima curvatura (²)

$$1\,/\,\varrho^2_{\nu-1} = M_{\nu-2}\, M_\nu \,/\, M^2_{\nu-1}\, M_1\,,$$

ove

$$M_\nu = \begin{Vmatrix} x_i^{(1)} \\ x_i^{(2)} \\ \vdots \\ x_i^{(\nu)} \end{Vmatrix}^2$$

(l'apice fra parentesi indica la derivazione lungo la curva ripetuta tante volte quante sono le sue unità).

Vogliamo dimostrare che una superficie è individuata rispetto al gruppo delle deformazioni di specie ν dai simboli principali d'ordine ν. Supporremo dimostrato l'asserto per le deformazioni fino a quelle di specie $\nu-1$. Dob-

(¹) Tesi, nn. 1, 6, 9.
(²) Tesi, n. 23.

biamo cercare quali nuove condizioni bisogna aggiungere perchè una deformazione di specie $\nu - 1$ divenga di specie ν. Deve essere invariante per deformazione

$$\mathrm{M}_\nu = \begin{vmatrix} \Sigma_i x_i^{(1)} x_i^{(1)} & \Sigma_i x_i^{(1)} x_i^{(2)} & \ldots & \Sigma_i x_i^{(1)} x_i^{(\nu)} \\ \Sigma\, x_i^{(2)} x_i^{(1)} & \Sigma\, x_i^{(2)} x_i^{(2)} & \ldots & \Sigma\, x_i^{(2)} x_i^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma\, x_i^{(\nu)} x_i^{(1)} & \Sigma\, x_i^{(\nu)} x_i^{(2)} & \ldots & \Sigma\, x_i^{(\nu)} x_i^{(\nu)} \end{vmatrix}.$$

Il termine generico di questo determinante è $\Sigma_i^{(r)} x_i^{(s)}$; le derivazioni eseguite lungo la curva dànno

$$x_i^{(1)} = x_i^{(10)} u' + x_i^{(01)} v'$$

$$x_i^{(2)} = x_i^{(20)} u'^2 + 2x^{(11)} u'v' + x_i^{(02)} v'^2 + x_i^{(10)} u' + x_i^{(01)} v'$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La somma $\Sigma x_i^{(r)} x_i^{(s)}$ è quindi un polinomio d'ordine $r+s$ nelle variabili $u', v', u'', v'', \ldots, u^{(r)}, v^{(r)}$ se, come si può, si suppone $r \geq s$; i suoi coefficienti sono somme del tipo $\Sigma x_i^{(hk)} x_i^{(lm)}$ con $h+k \leq r$, $l+m \leq s$, i segni di uguaglianza avendo valore solo per i termini della *forma* d'ordine $r+s$ in u', v'; cioè detti coefficienti sono i simboli $[hklm]$ di ordine r.

I simboli d'ordine massimo ν si trovano solo nei termini dell'ultima riga (o colonna); ma non vi sono simboli principali (cioè tali che $h+k = = l+m = \nu$) se non nell'ultimo termine del determinante e sempre come coefficienti della *forma* d'ordine 2ν in u', v' in esso contenuta. Ora, supposto dimostrato il teorema fino a $\nu - 1$ invece che a ν, sono invarianti tutti i simboli principali d'ordine $\nu - 1$; quindi anche quelli dedotti d'ordine ν. L'invarianza della $(\nu-1)$-esima curvatura è assicurata quando all'invarianza delle curvature precedenti s'aggiunga quella della forma d'ordine 2ν in u', v' contenuta in $\Sigma x_i^{(\nu)} x_i^{(\nu)}$. E poichè i coefficienti di essa sono combinazioni dei simboli principali d'ordine ν, la condizione sopra enunciata è certo sufficiente.

Ma è anche necessario che sian *tutti* invarianti? La domanda deve porsi, perchè, mentre i simboli principali d'ordine ν sono $\dfrac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$, i coefficienti d'una forma binaria d'ordine 2ν sono $2\nu+1$; quindi, appena $\nu > 1$, cioè per ogni deformazione che non sia una semplice flessione, risulta

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2} - (2\nu+1) = \frac{\nu(\nu-1)}{2} > 0.$$

Vogliamo appunto dimostrare che solo $2\nu+1$ sono i simboli principali d'ordine ν indipendenti, e che gli altri si possono ottenere da questi e da quelli d'ordine inferiore (quindi anche da quelli dedotti d'ordine ν). Per fissare intanto $2\nu+1$ di questi simboli principali, prendiamo quelli del tipo

$$[\nu 0 \nu 0]\,,\ [\nu\,,0\,,\nu-1\,,1]\,,\ldots,[\nu\,.\,0\,,1\,,\nu-1]\,,\ [\nu 00\nu]\,,$$
$$[\nu-1\,,1\,,0\,,\nu]\,,\ldots,[1\,,\nu-1\,,0\,,\nu]\,,\ [0\nu 0\nu]$$

che diremo *fondamentali*.

Il coefficiente di $u'^{2\nu-s}\,v'^{s}$ si compone linearmente, senza considerare i fattori numerici di combinazione, di tutti quegli $[hklm]$ tali che

$$h+k=l+m=\nu \quad , \quad h+l=2\nu-s\,.$$

Partiamo pertanto da un simbolo

$$[\nu\,,0\,,\nu-s\,,s]$$

e formiamoci i due simboli

$$[\nu-1\,,0\,,\nu-s\,,s] \quad , \quad [\nu-1\,,0\,,\nu-s+1\,,s-1]\,.$$

Si trova subito

$$\frac{\partial}{\partial u}[\nu-1\,,\nu-s\,,s]-\frac{\partial}{\partial v}[\nu-1\,,0\,,\nu-s+1\,,s-1]=$$
$$=[\nu\,,0\,,\nu-s\,,s]-[\nu-1\,,1\,,\nu-s+1\,,s-1]:$$

cioè il simbolo principale $[\nu-1\,,1\,,\nu-s+1\,,s-1]$ d'ordine ν è uguale al simbolo fondamentale corrispondente, più un'espressione, per ipotesi, invariante. Su questo nuovo simbolo operiamo allo stesso modo che sul precedente formando gli altri due

$$[\nu-2\,,1\,,\nu-s+1\,,s-1] \quad , \quad [\nu-2\,,1\,,\nu-s+2\,,s-2]$$

e poi

$$\frac{\partial}{\partial u}[\nu-2\,,1\,,\nu-s+1\,,s-1]-\frac{\partial}{\partial v}[\nu-2\,,1\,,\nu-s+2\,,s-2]=$$
$$=[\nu-1\,,1\,,\nu-s+1\,,s-1]-[\nu-2\,,2\,,\nu-s+2\,,s-2];$$

e con ciò otteniamo il nuovo simbolo $[\nu-2\,,2\,,\nu-s+2\,,s-2]$, che pure entra nel coefficiente di $u'^{2\nu-s}\,v'^{s}$, espresso per il precedente e per simboli dedotti d'ordine ν; quindi anche uguale al simbolo fondamentale di partenza, più un'espressione invariante. E applicando questo procedimento ricorrente, si trova che ogni simbolo contenuto nel coefficiente di $u'^{2\nu-s}\,v'^{s}$ è uguale al simbolo fondamentale corrispondente, aumentato di un'espressione invariante per le deformazioni di specie ν. Lo stesso procedimento si applica ai simboli che terminano con 0ν. Quindi, trascurando in ogni coefficiente i termini già invarianti, si può sostituire alla forma considerata, invariante nelle deformazioni di specie ν, quella che si ottiene ponendo in ogni coefficiente, in luogo di un simbolo principale, il simbolo fondamentale corrispondente: questa diremo *forma fondamentale di specie* ν. È facile scriverla.

La forma primitiva contenuta nel termine $\Sigma x_i^{(\nu)} x_i^{(\nu)}$ è

$$\sum_1^n{}_i \left\{ \sum_0^\nu{}_h \binom{\nu}{h} x_i^{(\nu-h,h)} u'^{\nu-h} v'^h \right\}^2 =$$

$$= \sum_1^n{}_i \sum_1^\nu{}_{hk} \binom{\nu}{h}\binom{\nu}{k} x_i^{(\nu-h,h)} x_i^{(\nu-k,k)} u'^{2\nu-h-k} v'^{h+k} =$$

$$= \sum_0^\nu{}_{h,k} \binom{\nu}{h}\binom{\nu}{k} [\nu-h\,,h\,,\nu-k\,,k]\, u'^{2\nu-h-k} v'^{h+k}\,.$$

Poniamo $h+k=s$; il coefficiente di $u'^{2\nu-s} v'^s$ è

$$\sum_0^\nu{}_h \binom{\nu}{h}\binom{\nu}{s-h} [\nu-h\,,h\,,\nu-s+h\,,s-h]\,;$$

per quanto s'è ottenuto or ora, possiamo sostituire ai diversi simboli

$$[\nu-h\,,\nu-s+h\,,s-h]$$

lo stesso simbolo fondamentale corrispondente; quindi la forma fondamentale si scrive

$$\sum_0^{\nu-1}{}_s [\nu\,,0\,,\nu-s\,,s] \sum_0^s{}_h \binom{\nu}{h}\binom{\nu}{s-h} u'^{2\nu-s} v'^s + [\nu 00\nu] \sum_0^\nu{}_h \binom{\nu}{h}^2 u'^\nu v'^\nu +$$

$$+ \sum_0^{\nu-1}{}_s [s\,,\nu-s\,,0\,,\nu] \sum_0^s{}_h \binom{\nu}{h}\binom{\nu}{s-h} u'^s v'^{2\nu-s}\,.$$

Le prime forme fondamentali sono

$$[1010]\,u'^2 + 2[1001]\,u'v' + [0101]\,v'^2$$

$$[2020]\,u'^4 + 4[2011]\,u'^3 v' + 6[2002]\,u'^2 v'^2 + 4[1102]\,u'v'^3 + [0202]\,v'^4$$

$$[3030]\,u'^6 + 6[3021]\,u'^5 v' + 15[3012]\,u'^4 v'^2 +$$

$$+ 20[3003]\,u'^3 v'^3 + 15[2103]\,u'^2 v'^4 + 6[1203]\,u'v'^5 + [0303]\,v'^6.$$

La prima è la solita forma di Gauss; la seconda è quella trovata già al n. 4. Possiamo riassumere nel modo seguente i resultati ottenuti:

Per riconoscere se due superficie ammettono una applicabilità di specie ν, *occorre e basta vedere se è possibile trasformare le* ν **forme differenziali binarie** *fondamentali dell'una*

$$\sum_0^{\mu-1}{}_s\,[\mu\,,0\,,\mu-s\,,s]\sum_0^{s}{}_h\binom{\mu}{h}\binom{\mu}{s-h}du^{2\mu-s}\,dv+[\mu 0 0 \mu]\sum_0^{\mu}{}_h\binom{\mu}{h}^2 du^{\mu}\,dv^{\mu}$$
$$+\sum_0^{\mu-1}{}_s\,[s\,,\mu-s\,,0\,,\mu]\sum_0^{s}{}_h\binom{\mu}{h}\binom{\mu}{s-h}du^{s}\,dv^{2\mu-s}\quad(\mu=1\,,\,..,\nu),$$

nelle corrispondenti dell'altra. Se ciò è possibile, punti corrispondenti delle due superficie devono essere quelli nei quali sono uguali i valori della curvatuva gaussiana e di un suo parametro differenziale. In conseguenza di queste due equazioni, è necessario che siano identici in punti corrispondenti i valori dei simboli fondamentali fino a quelli d'ordine ν *(inclusi): l'invarianza di questi simboli caratterizza le deformazioni di specie* ν.

In una deformazione di specie ν *[che conserva cioè la* $(\nu-1)$*-esima curvatura di ogni curva e le precedenti] esistono* ∞^1 *curve che conservano anche la* ν*-esima curvatura, e per un punto della superficie ne passano* $2\nu+2$ *(contate con le dovute molteplicità); se ve ne passa un'altra, l'applicabilità è di specie* $\nu+1$.

6. Si sa che la trasformazione di una superficie per applicabilità è conforme; la proprietà analoga per le deformazioni di specie ν è la seguente: *nella deformazione rimane inalterato l'angolo degli* S_k *osculatori a due curve aventi in comune un elemento d'ordine* $k-1$, *con* $k\leq\nu$.

La dimostrazione, essendo due tali S_k in un S_{k+1}, si fa subito. Del resto ce ne possiamo convincere anche intuitivamente. Sia, per brevità di discorso, $\nu=2$; AB l'elemento comune alle due curve, C e C′ gli estremi del secondo elemento su ciascuna. Per l'applicabilità sono invarianti AB, BC, BC′, CC′; per esser la deformazione di seconda specie, rimangono inalterati, oltre ai precedenti, anche i segmenti AC, AC′; quindi il tetraedro ABCC′ rimane rigido nella deformazione, e perciò non cambia l'angolo dei due piani osculatori ABC, ABC′.

7. Nè meno facile è trovar la particolarità geometrica di quelle curve (se ne esistono) che annullano le prime ν forme fondamentali. Si vede subito che *gli* $S_{\nu-1}$ *all'infinito degli* S_ν *osculatori a una tal curva appartengono all'assoluto*.

Queste curve però non esistono generalmente sopra una superficie, e anche la dimensione dello spazio può portare una limitazione alla loro esistenza. Per es., in S_4 una tal curva, per $\nu = 2$, deve essere piana; la più generale superficie che ne contenga un sistema ∞^1 si ottiene considerando un sistema ∞^1 di piani per le generatrici dell'assoluto e, su ciascuno di essi, una curva; non esistono superficie di S_4 che contengano un sistema doppio, plicemente infinito, di queste curve.

Meccanica. — *Sui moti rigidi di una massa fluida limitata.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio P. Pizzetti.

Nel bel trattato *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*, il Pizzetti studia (§§ 54 e 55) [1] i possibili moti rigidi di una massa fluida, che occupa uno spazio limitato, soggetta alle sole forze di mutua gravitazione e a una pressione uniforme in superficie.

Com'è noto, questo genere di studî si collega alle ricerche fisico matematiche sulla figura dei pianeti, nella ipotesi della fluidità primitiva.

Chiedo il permesso di riprendere tale soggetto, per apportare alcuni complementi ai risultati noti e fare nel tempo stesso un rapido ed esauriente esame dell'importante argomento.

1. Si consideri una massa di fluido qualsiasi, che occupa uno spazio limitato. Sieno: p la intensità della pressione in un punto generico P; ρ la densità; λ e μ le costanti elastiche di Lamé.

Posto

$$\Pi = p + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \dot{P} \quad , \quad \mathcal{P} = \int \frac{d\Pi}{\rho}, \tag{1}$$

dove $\dot{P}$ designa la derivata di P rispetto al tempo (cioè $\dot{P}$ altro non è che il vettore velocità della particella fluida P), e detta U la funzione potenziale delle forze di mutua gravitazione, le equazioni indefinite del fluido si possono scrivere nel modo seguente [2]:

$$\overset{\prime\prime}{P} = \operatorname{grad} (U - \mathcal{P}) - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{P} , \tag{2}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \dot{P} = 0 . \tag{3}$$

Nella prima di queste $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, cioè è il rapporto tra il coefficiente di viscosità e la densità; la seconda altro non è che la equazione di continuità.

[1] Pisa, Spoerri, 1913, pp. 125-131.

[2] Cfr. ad es. Burali-Forti e Marcolongo, *Analyse vectorielle générale. II. Applications à la mécanique et à la physique*. Pavie, Mattei, 1913, pp. 62-63.