ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

stenza. Per es., in S_4 una tal curva, per $\nu = 2$, deve essere piana; la più generale superficie che ne contenga un sistema ∞^1 si ottiene considerando un sistema ∞^1 di piani per le generatrici dell'assoluto e, su ciascuno di essi, una curva; non esistono superficie di S_4 che contengano un sistema doppio, plicemente infinito, di queste curve.

Meccanica. — *Sui moti rigidi di una massa fluida limitata.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio P. Pizzetti.

Nel bel trattato *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*, il Pizzetti studia (§§ 54 e 55) [1] i possibili moti rigidi di una massa fluida, che occupa uno spazio limitato, soggetta alle sole forze di mutua gravitazione e a una pressione uniforme in superficie.

Com'è noto, questo genere di studî si collega alle ricerche fisico matematiche sulla figura dei pianeti, nella ipotesi della fluidità primitiva.

Chiedo il permesso di riprendere tale soggetto, per apportare alcuni complementi ai risultati noti e fare nel tempo stesso un rapido ed esauriente esame dell'importante argomento.

1. Si consideri una massa di fluido qualsiasi, che occupa uno spazio limitato. Sieno: p la intensità della pressione in un punto generico P; ρ la densità; λ e μ le costanti elastiche di Lamé.

Posto

$$\Pi = p + (\lambda + 2\mu) \operatorname{div} \dot{P} \quad , \quad \mathcal{P} = \int \frac{d\Pi}{\rho}, \tag{1}$$

dove $\dot{P}$ designa la derivata di P rispetto al tempo (cioè $\dot{P}$ altro non è che il vettore velocità della particella fluida P), e detta U la funzione potenziale delle forze di mutua gravitazione, le equazioni indefinite del fluido si possono scrivere nel modo seguente [2]:

$$\overset{\prime\prime}{P} = \operatorname{grad}(U - \mathcal{P}) - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{P}\,, \tag{2}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \dot{P} = 0\,. \tag{3}$$

Nella prima di queste $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, cioè è il rapporto tra il coefficiente di viscosità e la densità; la seconda altro non è che la equazione di continuità.

[1] Pisa, Spoerri, 1913, pp. 125-131.

[2] Cfr. ad es. Burali-Forti e Marcolongo, *Analyse vectorielle générale. II. Applications à la mécanique et à la physique*. Pavie, Mattei, 1913, pp. 62-63.

2. Sia O un punto, comunque prefissato, della massa fluida. Il più generale movimento rigido è notoriamente caratterizzato dalla seguente relazione vettoriale:

$$\dot{P} = \tau + \omega \wedge (P - O)\,, \tag{4}$$

se con τ e ω, vettori funzioni di t, si designano le caratteristiche del moto (traslazione e rotazione) relative al tempo t. Facendo, nella precedente, $P = O$, si ha

$$\dot{O} = \tau\,,$$

per cui essa può ancor scriversi

$$\dot{P} - \dot{O} = \omega \wedge (P - O)\,. \tag{4'}$$

3. Ci sarà utile di ricavare dalla (4) l'espressione della accelerazione. A tal uopo dalla (4), derivando rispetto a t, si ha

$$\overset{\prime\prime}{P} = \dot{\tau} + \dot{\omega} \wedge (P - O) + \omega \wedge (\dot{P} - \dot{O})\,,$$

ovvero, notando che, per la (4'), è

$$\begin{aligned} \omega \wedge (\dot{P} - \dot{O}) &= \omega \wedge [\omega \wedge (P - O)] = -\,\omega^2 (P - Q) \text{ (}^1\text{)} \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \operatorname{grad} (P - Q)^2\,. \end{aligned}$$

avendo chiamato Q il piede della perpendicolare da P all'asse di rotazione, si ottiene per l'accelerazione l'espressione seguente:

$$\overset{\prime\prime}{P} = \dot{\tau} + \dot{\omega} \wedge (P - O) - \frac{\omega^2}{2} \operatorname{grad} (P - Q)^2\,. \tag{5}$$

Ci saranno ancora utili le formole seguenti, di deduzione immediata:

$$\operatorname{rot} \dot{P} = \operatorname{rot} [\omega \wedge (P - O)] = 2\omega\,, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} [\dot{\omega} \wedge (P - O)] = 2\dot{\omega}\,, \tag{7}$$

$$\operatorname{div} \dot{P} = \operatorname{div} [\omega \wedge (P - O)] = 0\,. \tag{8}$$

(1) Cfr. ad es. Levi-Civita, *Lezioni di meccanica razionale. Cinematica* cap. II.

4. Ciò premesso, notiamo intanto che, per la (8), la (3) diviene

$$\frac{d\rho}{dt} = 0; \tag{3'}$$

cioè *il fluido dev'essere incompressibile o almeno deve comportarsi, durante il moto, come tale, qualora per sua natura esso nol fosse.*

Sempre per la (8), le (1) divengono

$$\Pi = p \quad , \quad \mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho}, \tag{1'}$$

mentre per la (6), essendo

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathrm{P} = 2 \operatorname{rot} \dot{\omega} = 0 ,$$

la (2) si modifica nella seguente:

$$\overset{\prime\prime}{\mathrm{P}} = \operatorname{grad} (\mathrm{U} - \mathcal{P}). \tag{2'}$$

Essendo scomparsa, nel passaggio dalle (1) e (2) alle (1′) e (2′), ogni traccia della natura viscosa del fluido, vuol dire che *la natura viscosa del fluido non ha alcuna influenza nei moti in discorso*: *il fenomeno cioè si svolge come se la massa in movimento fosse fluida perfetta.*

Ciò era da attendersi, dato che nei movimenti che si studiano non vi è mutuo scorrimento delle particelle fluide le une sulle altre: non vi è quindi modo di manifestarsi della (eventuale) viscosità della massa fluida.

5. La eliminazione di $\overset{\prime\prime}{\mathrm{P}}$ tra la (2′) e la (5) dà luogo alla seguente relazione:

$$\tau + \dot{\omega} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O}) = \operatorname{grad} [\mathrm{U} - \mathcal{P} + \tfrac{1}{2}\omega^2 (\mathrm{P} - \mathrm{Q})^2]. \tag{9}$$

Prendendo il rot di entrambi i membri, notando che quello del secondo membro è identicamente nullo, e quello del primo membro è, per la (7), $2\dot{\omega}$, si ha

$$\dot{\omega} = 0. \tag{10}$$

Questa mette in rilievo che la *rotazione* ω è indipendente dal tempo t, cioè *deve essere uniforme* [1].

6. La (9) diviene, per la (10),

$$\operatorname{grad} [\mathrm{U} - \mathcal{P} + \tfrac{1}{2}\omega^2 (\mathrm{P} - \mathrm{Q})^2] = \tau,$$

[1] Cfr. Pizzetti, loc. cit., § 55.

dalla quale integrando, e chiamando $\varphi(t)$ una funzione arbitraria del tempo, si ottiene

$$U - \mathcal{S} + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,(P - Q)^2 = \dot{\tau} \times (P - O) + \varphi(t). \tag{11}$$

Si noti che U, dipendendo dalla reciproca posizione delle masse (che non muta col tempo), non varia esplicitamente con t e che, quando si tenga conto della (3′), pure $\mathcal{S}$ non varia con t. Ne consegue che il primo membro della (11), e quindi anche il secondo, non debbono contenere esplicitamente t. Siccome questo deve aver luogo qualunque sia $P - O$, è necessario e sufficiente che si abbia

$$\dot{\tau} = 0 \quad , \quad \varphi(t) = \text{costante}.$$

La (11) allora diventa

$$U - \mathcal{S} + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,(P - Q)^2 = \text{costante}, \tag{11′}$$

Scende, da questa, che *le superficie isobariche*

$$\mathcal{S} = \text{costante}$$

coincidono con le superficie di equilibrio

$$U + \tfrac{1}{2}\,\omega^2\,(P - Q)^2 = \text{costante} \ (^1). \tag{12}$$

7. Concludendo: il più generale moto rigido della massa fluida, compatibile con le condizioni richieste, è quello definito dalla (4) dove ω e τ sono vettori costanti. Cioè *gli unici moti rigidi possibili per un fluido soggetto alle sole forze di mutua gravitazione, sono le rotazioni uniformi* ([2]), *le traslazioni uniformi e i moti composti di una rotazione e di una traslazione, entrambe uniformi.*

E fino a questo punto non si è avuto bisogno di invocare la isobaricità della superficie contorno. Essa riguarda le configurazioni della massa fluida.

8. In quanto alle configurazioni possibili per la massa fluida, dotata di tali movimenti, sono quelle per cui la superficie contorno appartiene alla famiglia delle superficie di equilibrio (12) ([3]).

La traslazione non reca alcun contributo alla configurazione, per cui le configurazioni già note (ellissoidi di Mac-Laurin ed ellissoidi di Jacobi) possono essere assunte da masse fluide le quali, oltre che essere rotanti unifor-

([1]) Cfr. Pizzetti, loc. cit., § 54, pag. 127.

([2]) Cfr. Pizzetti, loc. cit., § 55, pag. 131.

([3]) Cfr. Almansi, *Un'osservazione sulle figure d'equilibrio dei fluidi rotanti.* Questi Rendiconti, vol. XXIII, 1914, pag. 651.

memente attorno ad assi convenienti, subiscono una traslazione uniforme di insieme secondo una qualsiasi direzione.

Per le semplici traslazioni uniformi ($\omega = 0$), le superficie (12) divengono

$$U = \text{costante}:$$

cioè le superficie di equilibrio coincidono con le equipotenziali.

Non tutte le configurazioni di una massa fluida sono dunque compatibili con la traslazione uniforme [1].

Un caso notevolmente semplice, in cui vi è compatibilità, è quello delle configurazioni sferiche. È infatti noto che, per una sfera omogenea, le superficie equipotenziali sono sfere concentriche.

Fisica applicata. — *Le proprietà magnetiche degli acciai e la loro utilizzazione nel collaudo dei proietti.* Nota degli ingegneri Gustavo Colonnetti ed Alberto Pozzo, presentata dal Socio Vito Volterra.

È noto che la determinazione diretta delle proprietà di resistenza che nell'acciaio si richiedono in relazione al genere di sollecitazione che, in opera, esso è destinato a sopportare, conduce, nella maggior parte dei casi, al deterioramento del pezzo su cui la prova viene eseguita: ne segue che, qualunque sia l'esito dell'esperienza, quel pezzo non può più venire utilizzato.

Si può bensì adottare come provetta per l'esperienza un campione dello stesso materiale, prelevato dalla stessa colata a cui appartiene il pezzo che si vuol collaudare, lavorato nello stesso modo ed assoggettato, insieme con esso, agli stessi trattamenti sia termici che meccanici. Ma è assai facile che quel campione risenta l'effetto di questi trattamenti in grado diverso dal pezzo che accompagna, sopra tutto se ne differisce molto per forma e dimensioni.

Quando si tratta pertanto di collaudare dei forti lotti di pezzi tutti del medesimo tipo, si preferisce sacrificarne un piccolo numero prelevando direttamente da essi la provette pel collaudo. Resta tuttavia indiscutibile che anche questo metodo non dice niente di assolutamente sicuro se non per quei pochi pezzi su cui si è effettivamente eseguita la prova: e sono proprio quelli che dalla prova stessa vengono messi fuori servizio. Esso non dà che una garanzia molto dubbia sulle caratteristiche di tutti gli altri pezzi destinati ad essere effettivamente utilizzati.

[1] Cfr. Poincaré, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris, Naud, 1902, cap. II.