ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 maggio 1916.

F. D'OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulle distorsioni di un cilindro elastico due volte connesso.* Nota II della sig.na ELEONORA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

La funzione μ [formola (VI) della Nota precedente] è della forma:

$$\mu = (x^2 + y^2)\,\varphi(J) + \left[\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2\right]\psi(J)\,.$$

Allora, poichè

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{2x}{x^2+y^2}(J - a^2) - \frac{2a}{x^2+y^2} =$$

$$= -\frac{2x}{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2 + y^2}\,\frac{J}{a^2}(J-a^2) - \frac{2a}{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2}\,\frac{J}{a^2}$$

$$\frac{\partial J}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2+y^2}(J-a^2) = -\frac{2y}{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2}\,\frac{J}{a^2}(J-a^2)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 2x\left[\varphi(J) + \psi(J) + \varphi'(J)(a^2 - J) + \psi'(J)\left(J - \frac{J^2}{a^2}\right)\right] -$$

$$- 2a\,\varphi'(J) - \frac{2}{a}\psi(J) - \frac{2}{a}J\psi'(J)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2y\left[\varphi(J) + \psi(J) + \varphi'(J)(a^2 - J) + \psi'(J)\left(J - \frac{J^2}{a^2}\right)\right];$$

e tali due espressioni sono costanti sulle due superficie cilindriche se per $J = R_1^2$, $J = R_2^2$, si ha:

$$\text{(VII)} \qquad \varphi(J) + \psi(J) + \varphi'(J)(a^2 - J) + \psi'(J)\left(J - \frac{J^2}{a^2}\right) = 0,$$

la quale condizione, applicata alla (VI), dà

$$\text{(VIII)} \left\{ \begin{aligned} & c_1 + b_1 - \frac{sa R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} + \frac{s R_1^4}{2a(R_1^2 + R_2^2)} - \frac{(1-s)\, a^3 R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{R_1^4} + \\ & \qquad\qquad + \frac{(1-s)\, a R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{R_1^2} = 0 \\ & c_1 + b_1 + \frac{sa R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} - \frac{s R_2^4}{2a(R_1^2 + R_2^2)} - \frac{(1-s)\, a^3 R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + R_2^2)} \frac{1}{R_2^4} + \\ & \qquad\qquad + \frac{(1-s)\, a R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} \frac{1}{R_2^2} = 0 \end{aligned} \right.$$

soddisfatte per

$$s = \frac{a^2 \left[a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2\right]}{R_1^2 R_2^2 \left[R_1^2 + R_2^2 - 2a^2\right] + a^2 \left[a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2\right]}$$

$$c_1 = \frac{a\left[a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2\right]}{2(R_1^2 + R_2^2)(R_1^4 - R_2^4)} \frac{R_1^6(R_1^2 - 2a^2) - R_2^6(R_2^2 - 2a^2)}{R_1^2 R_2^2\left[R_1^2 + R_2^2 - 2a^2\right] + a^2\left[a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2\right]}$$

$$b_1 = -\frac{1}{\left[R_1^2 + R_2^2\right]^2} \frac{a R_1^4 R_2^4 (R_1^2 + R_2^2 - 2a)}{R_1^2 R_2^2 \left[R_1^2 + R_2^2 - 2a^2\right] + a^2\left[a^2(R_1^2 + R_2^2) - 2R_1^2 R_2^2\right]}.$$

Determinata χ, ho

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{m}{2\pi} \frac{4K(L+K)}{L+2K} \Bigg\{ & -\frac{1}{4} x \log J + \frac{s}{4a} \log J + \\ & + \frac{x - \frac{s}{a}}{4(R_1^2 + R_2^2)} \left[J - \frac{R_1^2 R_2^2}{J}\right] + \frac{x^2 + y^2}{2} \left[c_1 + \frac{s}{2a(R_1^2 + R_2^2)} J^2\right] + \\ & + \frac{\left(x - \frac{1}{a}\right)^2 + y^2}{2} \left[b_1 + \frac{(1-s)\, a^3 R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + R_2^2)} \frac{1}{J^2}\right] \Bigg\}. \end{aligned}$$

Avuta χ, posso determinare ψ e quindi φ come nel problema precedente; ho

$$\varphi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{-y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x} + y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x-\frac{1}{a}} - \right.$$

$$-\frac{x-\frac{1}{a}}{2}\log\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right] + \frac{x}{2}\log(x^2+y^2) +$$

$$+\frac{a\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2}\log(x^2+y^2) - \frac{\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2\left(s-\frac{1}{2}\right)}{a^3(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\log\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right] +$$

$$\left. + \left[c_1 + b_1 + \frac{sa^3}{2(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)} + \frac{(1-s)\,\mathrm{R}_1^2\mathrm{R}_2^2}{2a(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\right](x^2-y^2)\right\}.$$

Trovate Φ e φ le (I) dànno gli spostamenti: Se in particolare i due cilindri limitanti il solido sono concentrici

$$a = s = h_1 = c_1 = 0 \quad \mathrm{R}_1^2 = \frac{\varDelta}{r_1^2} \quad \mathrm{R}_2^2 = \frac{1}{r_2^2}\,,$$

$$\chi = \frac{r_1^2 r_2^2}{2(r_1^2+r_2^2)}\,\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{1}{2(r_1^2+r_2^2)}\,xy^2 - \frac{1}{2(r_1^2+r_2^2)}\,x^3\,,$$

$$\psi = -\frac{x^3}{3(r_1^2+r_2^2)} + \frac{xy^2}{r_1^2+r_2^2}\,.$$

Quindi, se $r=\sqrt{x^2+y^2}$, sarà

$$\Phi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{\frac{1}{4}\,x\log r^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{4(r_1^2+r_2^2)}\,\frac{x}{x^2+y^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4(r_1^2+r_2^2)}\,xy^2 - \frac{1}{4(r_1^2+r_2^2)}\,x^3\right\}$$

$$\varphi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{\frac{x}{2}\log r^2 - y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x} + \frac{y^2x}{r_1^2+r_2^2} - \frac{x^3}{3(r_1^2+r_2^2)}\right\},$$

e quindi, dalle formole (I) dell'Almansi

$$u = \frac{m}{2\pi}\left\{\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\log r - \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\,\frac{r_1^2r_2^2}{r_1^2+r_2^2}\,\frac{\partial^2\log r}{\partial x^3} - \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\,\frac{x^2}{r^2} + 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,(r_1^2+r_2^2)}\left[(3\mathrm{L}+5\mathrm{K})\,y^2 + (\mathrm{L}-\mathrm{K})\,x^2\right]\right\}$$

$$v = \frac{m}{2\pi}\left\{\mathrm{artg}\,\frac{y}{x} + \frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2(\mathrm{L}+2\mathrm{K})}\left(r^2 - \frac{r_1^2r_2^2}{r_1^2+r_2^2}\right)\frac{\partial^2\log r}{\partial x\,\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{L}+3\mathrm{K}}{(\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,(\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2)}\,xy\right\}$$

$w = 0$.

Mi propongo ora di trovare le espressioni degli spostamenti nell'ipotesi che, eseguito il taglio nel modo solito, si sia fatta subire all'una faccia una rotazione intorno all'asse z. Cercherò perciò di determinare due funzioni Φ e φ soddisfacenti alle condizioni imposte dal prof. Almansi e, di più, tali che

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{r}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{y \operatorname{artg}\frac{y}{x}+\text{funzione monodroma}\right\}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{r}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{x \operatorname{artg}\frac{y}{x}+\text{funzione monodroma}\right\};$$

e questo si verifica se

$$\varphi=\frac{r}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{xy \operatorname{artg}\frac{y}{x}+\frac{3}{4}(x^2-y^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{y^2-x^2}{4}\log(x^2+y^2)+\psi\right\},$$

dove ψ è una funzione armonica con derivate rispetto ad x e ad y regolari

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{r}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\left\{-\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}=\Delta^2\Phi\,.$$

Ora osservo che, se fosse

$$\text{(IX)}\qquad \Phi=\frac{r}{2\pi}\,\frac{4\mathrm{K}(\mathrm{L}+\mathrm{K})}{\mathrm{L}+2\mathrm{K}}\,\frac{1}{8}\left\{(x^2+y^2)\left[c_1+(1-b_2)\log \mathrm{J}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]\left[b_1+b_2\log \mathrm{J}\right]\right\},$$

Φ soddisferebbe alla condizione di essere biarmonica, ed il suo Δ^2 conterrebbe il termine $-\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$. Ma in Φ comparirebbe anche

$$+\frac{2b_2}{a}\,x\log(x^2+y^2)\,,$$

il cui Δ^2 è $\dfrac{4b_2}{a}\,\dfrac{\partial\log(x^2+y^2)}{\partial x}$; e quindi, essendo $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\Delta^2\Phi$, φ conterrebbe il prodotto di una costante per

$$\left[x\log\left[x^2+y^2\right]-2x-2y\operatorname{artg}\frac{y}{x}\right],$$

la cui derivata rispetto ad y non è regolare. Posso eliminare tale inconveniente aggiungendo a Φ la funzione biarmonica (vedi problema precedente)

$$\frac{r}{2\pi}\frac{4K(L+K)}{L+2K}\frac{1}{8}\left\{\frac{2b_2}{a}x\log J-\frac{2b_2}{a(R_1^2+R_2^2)}x\left[J-\frac{R_1^2R_2^2}{J}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{2b_2a^2R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\frac{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2}{J^2}\right\}.$$

Allora

$$\text{(X)}\qquad \Phi=\frac{r}{2\pi}\frac{4K(L+K)}{L+2K}\frac{1}{8}\left\{(x^2+y^2)\left[c_1+(1-b_2)\log J\right]+\right.$$
$$+\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]\left[b_1+b_2\log J-\frac{2b_2a^2R_1^2R_2^2}{R_1^2+R_2^2}\frac{1}{J^2}\right]+$$
$$\left.+\frac{2b_2}{a}x\log J-\frac{2b_2}{a(R_1^2+R_2^2)}x\left[J-\frac{R_1^2R_2^2}{J}\right]\right\}.$$

Ora debbo determinare b_1, c_1, b_2 in modo che $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ siano costanti per $J=R_1^2$ $J=R_2^2$. Ora la somma dei termini in parentesi si compone di due parti: l'una,

$$\frac{2b_2}{a}x\log J-\frac{2b_2x}{a(R_1^2+R_2^2)}\left[J-\frac{R_1^2R_2^2}{J}\right]$$

avente già derivate rispetto ad x ed y costanti per $J=R_1^2$ $J=R_2^2$; l'altra della forma

$$(x^2+y^2)\,\varphi(J)+\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]\psi(J).$$

Si è già vista la condizione (VII) perchè una funzione di questo tipo abbia derivate rispetto ad x e ad y costanti per $J=R_1^2$ e $J=R_2^2$.

Applicandola al caso in cui $\varphi(J)$ e $\psi(J)$ siano le speciali funzioni contenute nella (X), si ottengono due equazioni in c_1, b_1, b_2 soddisfatte per

$$b_2=\frac{a^2(R_1^2+R_2^2)}{R_1^2-R_2^2}\,\frac{R_1^2(R_2^2\log R_1^2-a^2)-R_2^2(R_1^2\log R_2^2-a^2)}{a^2\left[a^2(R_1^2+R_2^2)-2R_1^2R_2^2\right]+R_1^2R_2^2(R_1^2+R_2^2-2a^2)}$$

$$b_1=b_2\,\frac{\left[R_1^2+R_2^2\right]\left[R_1^2+R_2^2-2a^2\right]+2a^4}{a^2(R_1^2+R_2^2)}+1$$

$$c_1=\frac{R_1^2\log R_1^2-R_2^2\log R_2^2}{R_2^2-R_1^2}.$$

Dalla (X), tenuto conto che la funzione armonica φ deve soddisfare alla condizione $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\Delta^2\Phi$, ho

$$\text{(XI)}\quad \varphi = \frac{r}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\left\{\left[c_1 + b_1 + \log a^2 - \frac{2b_2\,R_1^2\,R_2^2}{a^2(R_1^2+R_2^2)}\,\frac{x^2-y^2}{4}\right] + \right.$$

$$+\frac{b_2}{a(R_1^2+R_2^2)}\log(x^2+y^2) - \frac{b_2\,R_1^2\,R_2^2}{2a^4(R_1^2+R_2^2)}\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)\log\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right] - y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x-\dfrac{1}{a}}+$$

$$+xy\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x} - \left(x-\frac{1}{a}\right)y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x-\dfrac{1}{a}} - \frac{x^2-y^2}{4}\log(x^2+y^2)+$$

$$\left.+\frac{\left(x-\dfrac{1}{a}\right)^2-y^2}{4}\log\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+y^2\right]\right\}.$$

Avute dalla (X) e dalla (XI) Φ e φ, non ho che da applicare le (X_1) per avere gli spostamenti.

Matematica. — *Sui teoremi di Rolle e della media per le funzioni additive.* Nota di G. Vitali, presentata dal Socio C. Segre.

1. L'estensione dei teoremi di Rolle e della media alle funzioni additive [1] è stato oggetto di studî recenti nelle seguenti Note:

A) G. Fubini, *Esiste un corpo pesante a densità sempre nulla?* Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. 50°, 1914-15, pp. 293 sgg.

B) G. Fubini, *Il teorema del valor medio.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem. 1915, pp. 691 sgg.

C) G. Vitali, *I teoremi della media e di Rolle* (da una lettera al prof. G. Fubini). Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. 51°, 1915-16, pp. 143 sgg.

[1] La nozione di funzione additiva si trova già nelle *grandezze coesistenti* di Cauchy. Ved. Cauchy, *Mémoire sur le rapport différentiel de deux grandeurs qui varient simultanément* (Exercices d'analyse et de physique mathém., tome 2, Paris, 1841, pp. 188-229).

Il Servois (Annales de mathématiques, tome V, 1815), introdusse l'espressione « funzione distributiva » che in seguito fu usata per indicare quelle che attualmente si chiamano « funzioni additive ». Ved. G. Peano, *Le grandezze coesistenti di Cauchy* (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. 50°, 1914-15, pag. 1146).

La denominazione di funzione additiva è ora usata nei seguenti trattati: *Cours d'analyse infinitésimale* par Ch. J. de la Vallée Poussin, deuxième édition, tome II, pag. 110, Louvain, 1912; dott. Guido Fubini, *Lezioni di analisi matematica*, seconda edizione, pag. 376, Torino, 1915.