ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

$$
\text{(XI)}\quad \varphi = \frac{r}{2\pi}\,\frac{4K(L+K)}{L+2K}\left\{\left[c_1 + b_1 + \log a^2 - \frac{2b_2 R_1^2 R_2^2}{a^2(R_1^2+R_2^2)}\,\frac{x^2-y^2}{4}\right] + \right.
$$

$$
+ \frac{b_2}{a(R_1^2+R_2^2)}\log(x^2+y^2) - \frac{b_2 R_1^2 R_2^2}{2a^4(R_1^2+R_2^2)}\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2 + y^2\right] +
$$

$$
+ \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right)\log\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2 + y^2\right] - y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x-\frac{1}{a}} +
$$

$$
+ xy\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x} - \left(x-\frac{1}{a}\right) y\,\mathrm{artg}\,\frac{y}{x-\frac{1}{a}} - \frac{x^2-y^2}{4}\log(x^2+y^2) +
$$

$$
\left. + \frac{\left(x-\frac{1}{a}\right)^2 - y^2}{4}\log\left[\left(x-\frac{1}{a}\right)^2 + y^2\right]\right\}.
$$

Avute dalla (X) e dalla (XI) Φ e φ, non ho che da applicare le (X_1) per avere gli spostamenti.

Matematica. — *Sui teoremi di Rolle e della media per le funzioni additive*. Nota di G. Vitali, presentata dal Socio C. Segre.

1. L'estensione dei teoremi di Rolle e della media alle funzioni additive [1] è stato oggetto di studî recenti nelle seguenti Note:

A) G. Fubini, *Esiste un corpo pesante a densità sempre nulla?* Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. 50°, 1914-15, pp. 293 sgg.

B) G. Fubini, *Il teorema del valor medio*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª, 1° sem. 1915, pp. 691 sgg.

C) G. Vitali, *I teoremi della media e di Rolle* (da una lettera al prof. G. Fubini). Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. 51°, 1915-16, pp. 143 sgg.

[1] La nozione di funzione additiva si trova già nelle *grandezze coesistenti* di Cauchy. Ved. Cauchy, *Mémoire sur le rapport différentiel de deux grandeurs qui varient simultanément* (Exercices d'analyse et de physique mathém., tome 2, Paris, 1841, pp. 188-229).

Il Servois (Annales de mathématiques, tome V, 1815), introdusse l'espressione « funzione distributiva » che in seguito fu usata per indicare quelle che attualmente si chiamano « funzioni additive ». Ved. G. Peano, *Le grandezze coesistenti di Cauchy* (Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, vol. 50°, 1914-15, pag. 1146).

La denominazione di funzione additiva è ora usata nei seguenti trattati: *Cours d'analyse infinitésimale* par Ch. J. de la Vallée Poussin, deuxième édition, tome II, pag. 110, Louvain, 1912; dott. Guido Fubini, *Lezioni di analisi matematica*, seconda edizione, pag. 376, Torino, 1915.

Il Fubini, nella Nota A), dimostra:

Teorema I). *I teoremi della media e di Rolle valgono per una funzione additiva $f(\tau)$ definita in un campo piano, limitato e connesso,* J, *quando sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1°) *una retta qualsiasi non incontra il contorno di* J *in più di due punti* (1);

2°) $f(\tau)$ *è* CONTINUA SULLE RETTE (2): *cioè, se τ è una delle parti in cui* J *è diviso da una retta r, la $f(\tau)$ varia con continuità mentre r varia conservando la direzione* (3);

3°) $f(\tau)$ *ha derivata* (nel senso di Lebesgue o De la Vallée Poussin) *in ogni punto interno a* J *e* SUL CONTORNO.

Per derivata di $f(\tau)$ in un punto P si può qui intendere pertanto il limite di $\frac{f(\tau)}{\tau}$ per $\tau = 0$, τ essendo un campo connesso cui appartiene P e il cui rapporto al minimo cerchio di centro P che lo contiene è maggiore di un numero fisso $k > 0$.

In altre parole, *la derivata è qui intesa nel senso di Lebesgue* (4) *o, se si vuole, nel senso generale di Ch. de la Vallée Poussin* (5), con la condizione, in più, che P debba appartenere (cioè essere interno o sul contorno) a ciascuno dei campi τ che figurano nel rapporto di cui si deve cercare il limite (6).

Teorema I^{bis}). *Se però il campo* J *è un rettangolo, basta enunciare la seconda condizione per le rette parallele ai suoi lati e la terza per i punti interni al rettangolo, per poterne concludere* (coi ragionamenti molto semplici del Fubini) *che esiste un punto* P *proprio interno ad* J, *in cui* $f'(P) = \frac{f(J)}{J}$.

Si può dire, di più, che in questo caso basta che la derivata sia definita come il limite di $\frac{f(\tau)}{\tau}$ per $\tau = 0$, dove τ è un rettangolo coi lati paralleli

(1) Basta anche che questa condizione sia soddisfatta per le rette parallele agli assi coordinati (cioè a due rette fisse qualunque, non parallele).

(2) Questa denominazione è usata dal Fubini nella Nota (A).

(3) Questa condizione si può enunciare anche dicendo che, se τ è quel pezzo di J che è racchiuso tra due rette parallele, allora $f(\tau)$ tende a zero, quando tende a zero la distanza di queste due rette. Basta che tale condizione sia soddisfatta dalle rette parallele ad uno degli assi coordinati, cioè a due rette fisse qualsiasi non parallele (cfr. la Nota 1).

(4) *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, par M. H. Lebesgue. Ann. éc. norm. (3), XXVII, août. 1910, pp. 362 e 890.

(5) Loc. cit., pag. 113.

(6) A rigor di termini dovrei aggiungere: se il contorno è tale da consentire in tutti i suoi punti una derivata di questo genere.

ai lati di J contenente P al suo interno e col rapporto dei lati compreso tra due numeri inversi fissi H ed $\frac{1}{H}$ (con $1 \neq H \neq 0$).

Teorema I[ter]). Nella Nota B) il Fubini *omette la condizione 2ª* [della continuità di $f(\tau)$ sulle rette], *dimostrando però soltanto che* $\frac{f(J)}{J}$ *è compreso fra i limiti superiore ed inferiore della derivata di* f.

Teorema I[quater]). *Ammettendo, invece, che* $f(\tau)$ *sia continua non su rette, ma su altri tipi di linee, si può ancora nel caso generale dimostrare* (col metodo del Fubini) *che il citato punto* P *è interno ad* J.

Limitando in altro modo la natura del campo J, io ho poi dimostrato nella Nota C:

Teorema II). *I teoremi della media e di Rolle valgono quando* J *è un rettangolo, o un cerchio, o un'ellisse, o una corona circolare*, ecc. ecc., *purchè* $f(\tau)$ *ammetta derivata* (nel senso di De la Vallée Poussin) *finita in tutti i punti interni di* J, *o sul contorno; ed esiste quindi un punto* P *di* J *in cui* $f'(P) = \frac{f(J)}{J}$.

Veramente dalla mia Nota C) risulta soltanto che il punto P è interno, *o sul contorno* di J; ma nel presente lavoro completerò questo risultato, dimostrando che si può sempre trovare un tal punto *interno* a J.

Così potremo concludere, in particolare, che

Teorema IIbis). *I teoremi di Rolle e della media valgono per un campo* J *rettangolare; ed il punto* P, *in cui*

$$f'(P) = \frac{f(J)}{J}$$

è interno a J

se $f(\tau)$ *ammette derivata finita in ogni punto interno a* J *e se è continua sulle parallele ai lati di* J *(condizione di Fubini)*,

oppure *se ammette derivata finita in ogni punto di* J *interno o sul contorno (condizione di Vitali)*.

2. Per dimostrare i teoremi di Rolle o della media nel caso in cui J sia un rettangolo ABCD, io ho, nella mia Nota citata, diviso AB in 2^n parti uguali e tirate le parallele a BC per i punti di divisione; poi ho diviso BC in 2^n parti uguali e ho tirato per i punti di divisione le parallele ad AB, ed ho indicato con S_n il sistema di rettangoli uguali in cui J viene diviso da questi 2 sistemi di rette.

Ebbene: se $f(\tau)$ è una funzione additiva dei campi τ di J, che ammette in ogni punto (interno e sul contorno di J) derivata finita, e se $f(J) = 0$, per provare, col ragionamento da me usato nella Nota citata, che *esiste un punto* P *interno a* J *in cui* $f'(P) = 0$, basta provare che, per un qualche n,

o esiste un rettangolo τ di S_n interno a J (cioè non avente punti sul contorno di J) in cui $f(\tau) = 0$, oppure esistono due rettangoli τ_1, τ_2 di S_n interni a J, per cui

$$f(\tau_1) > 0 \quad \text{e} \quad f(\tau_2) < 0 .$$

Se non si verificassero queste condizioni, vorrebbe dire che, per ogni n e per ogni rettangolo τ di S_n interno a J, è sempre $f(\tau) > 0$ o sempre $f(\tau) < 0$.

Supponiamo che sia sempre $f(\tau) < 0$.

Indichiamo con S'_n il sistema dei rettangoli di S_n non interni a J.

È allora evidentemente

$$0 > f(S_3 - S'_3) > f(S_4 - S'_4) > f(S_5 - S'_5) > \cdots$$

e, poichè

$$f(S_n) = f(J) = 0 ,$$

è

$$0 < f(S'_3) < f(S'_4) < f(S'_5) < \cdots ;$$

e quindi esiste un numero $k > 0$ per cui

$$f(S'_n) > k ,$$

qualunque sia $n > 2$.

Esiste allora in S'_3 un rettangolo ϱ_3 per cui

$$f(\varrho_3) > \frac{k}{S'_3} \varrho_3 ;$$

e se ϱ'_3 è quella parte di S'_4 che è contenuta in ϱ_3, sarà

$$f(\varrho'_3) > f(\varrho_3) \text{ (1)}.$$

Esiste dunque in ϱ'_3 un rettangolo ϱ_4 (di S'_4) per cui

$$f(\varrho_4) \geq \frac{f(\varrho'_3)}{\varrho'_3} \varrho_4 > \frac{k}{S'_3} \frac{\varrho_3}{\varrho'_3} \varrho_4 ;$$

e se ϱ'_4 è quella parte di S'_5 che è contenuta in ϱ_4, esiste in ϱ'_4 un rettangolo ϱ_5 (di S'_5) per cui

$$f(\varrho_5) > \frac{k}{S'_3} \frac{\varrho_3}{\varrho'_3} \frac{\varrho_4}{\varrho'_4} \varrho_5 ,$$

e così via.

Si vede poi subito che, per ogni n, è

$$\frac{\varrho_n}{\varrho'_n} \geq \frac{4}{3} .$$

(1) Poichè $f(\varrho_3 - \varrho_3') < 0$, essendosi fatta l'ipotesi che in ogni rettangolo interno la $f(\tau)$ sia negativa.

Si conclude che

$$f(\varrho_n) > \frac{k}{S_3'}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}\varrho_n\,,$$

ossia che

$$\frac{f(\varrho_n)}{\varrho_n} > \frac{k}{\varrho_3'}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}.$$

Ora i rettangoli

$$\varrho_3\,\varrho_4\,\varrho_5\ldots,$$

essendo ciascuno contenuto nel precedente, hanno un punto comune P, e per l'ultima disuguaglianza, la derivata di $f(\tau)$ in P non potrebbe essere finita. E ciò contro l'ipotesi.

Un ragionamento analogo, fatto nel caso in cui J è un cerchio o una ellisse o una corona circolare ecc., porterebbe alla stessa conclusione.

3. Il prof. G. Peano nella Nota citata e in un'altra sua pubblicazione anteriore [1], si occupa dei teoremi di Rolle e della media e ne indica la semplice dimostrazione nel caso in cui la derivata in P sia intesa come il limite del rapporto di $\frac{f(\tau)}{\tau}$, dove τ un campo qualunque che può anche non contenere il punto P.

L'esistenza di simile derivata finita in ogni punto porta difatti la continuità, ed è di qui che si deducono facilmente i teoremi di Rolle e della media.

Ma la derivata nel senso generale di De la Vallée Poussin non porta come conseguenza la derivata di Peano: e quindi la portata dei risultati delle Note di Fubini e mia è naturalmente diversa da quella del risultato di Peano.

4. Ancora una osservazione.

Ho avuto occasione di distinguere al n. 1 derivate di De la Vallée Poussin considerate come limite di $\frac{f(\tau)}{\tau}$ in cui il punto limite P appartiene a τ, e derivate di De la Vallée Poussin considerate come limite di $\frac{f(\tau)}{\tau}$ in cui il punto limite P è interno τ. Risulta subito che le derivate di una di queste specie lo sono anche dell'altra se P è interno al campo d'esistenza della funzione, mentre è ovvio che non si può parlare che di derivate del 1° tipo se P è sul contorno.

Ad ogni modo, nel teorema di Fubini enunciato alla fine del n. 1 della presente Nota, poichè non si parla di derivate nei punti del contorno, le derivate si possono intendere senz'altro del 2° tipo.

[1] *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, per Giuseppe Peano. Torino 1887, pp. 171 sgg.