ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 giugno 1916.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle derivate delle isomerie vettoriali.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Le isomerie vettoriali [1] si presentano tutte le volte che vi è da considerare un moto di corpo rigido, una flessione di superfici inestendibili [2], una rappresentazione conforme, ecc.; e, quindi, le loro derivate rispetto al tempo o al punto del quale sono funzioni, divengono elementi indispensabili nel calcolo vettoriale assoluto. Credo quindi opportuno di pubblicare le formule che dànno queste derivate, e che, eccettuata la [1], sono nuove; tanto più che le isomerie vettoriali permettono di abolire del tutto i *due sistemi di assi, fisso* l'uno e *mobile* l'altro, insieme coi moti relativi [3] che nulla hanno a che fare con le questioni che si trattano, dovendosi solo considerare o *composizioni di moti,* o moti *ausiliari* di corpo rigido.

Conservo le notazioni della mia Memoria citata in principio. Essendo λ una qualsiasi isomeria vettoriale, si ha

$$\lambda = \cos\varphi + (I_3\lambda - \cos\varphi)\, H(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \operatorname{sen}\varphi \,.\, \mathbf{u}\wedge\,,$$

[1] C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (che indicheremo brevemente con A. V. G.), vol. I (Mattei, Pavia, 1912); C. Burali-Forti, *Isomerie vettoriali e moti geometrici* (Memorie R. Acc. di Torino, ser. II, vol. LXV, n. 14, adunanza del 27 dicembre 1914).

[2] M. Bottasso, *Sulla flessione delle superfici inestendibili* (Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª, 2° sem., pp. 174-182, 1915).

[3] Cfr. A. V. G., vol. I, II; M. Bottasso, A. V. G., vol. IV. In questi libri i moti relativi sono del tutto eliminati. Cfr. anche le mie Note: *Ingranaggi piani* (Atti R. Acc. Torino, 1902); *Sul moto di un corpo rigido* (idem, 1903); *Sul moto composto* (idem, 1912).

ove φ è numero reale ed $\mathbf{u}$ vettore unitario. In particolare

$$\lambda = \mathrm{Rotor}(\varphi, \mathbf{u}) \quad \text{ovvero} \quad \lambda = \mathrm{a\,Rotor}(\varphi, \mathbf{u}),$$

secondo che $I_3\lambda = 1$ ovvero $I_3\lambda = -1$. Dai Rotor derivano i *moti fisici* di corpo rigido; dagli a-Rotor (anti-rotor) derivano dei moti geometrici non realizzabili fisicamente.

Rotor *funzione di un numero.*

L'isomeria vettoriale, ad invariante terzo positivo,

$$\lambda = \mathrm{Rotor}(\varphi, \mathbf{u}),$$

sia funzione del numero reale t, e si indichino con gli apici le derivate rispetto a t.

Esistono i vettori Ω, Ω_1, funzioni di t, tali che

$$[1] \qquad \lambda' = \Omega\wedge \quad , \quad \mathrm{K}\lambda' = \Omega_1\wedge \mathrm{K}\lambda \; (^1),$$

legati, insieme colle loro derivate, dalle relazioni

$$[2] \qquad \Omega_1 = -\mathrm{K}\lambda\Omega \quad , \quad \Omega = -\lambda\Omega_1$$

$$[3] \qquad \Omega_1' = -\mathrm{K}\lambda\Omega' \quad , \quad \Omega' = -\lambda\Omega_1'$$

ed esprimibili mediante φ ed $\mathbf{u}$ sotto la forma

$$[4] \qquad \Omega = \varphi'\mathbf{u} + \mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\mathbf{u}' + (1 - \cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}'$$

$$[4'] \qquad \Omega_1 = -\varphi'\mathbf{u} - \mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\mathbf{u}' + (1 - \cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}',$$

la seconda delle quali si ottiene dalla prima cambiando φ in $-\varphi$, precisamente come $\mathrm{K}\lambda = \lambda^{-1}$ si ottiene da λ cambiando φ in $-\varphi$ (²).

(¹) Alle quali, per essere $\lambda . \mathrm{K}\lambda = \mathrm{K}\lambda . \lambda = 1$, si può dare la forma

$$\lambda' . \mathrm{K}\lambda = \Omega\wedge \quad , \quad \mathrm{K}\lambda' . \lambda = \Omega_1\wedge ,$$

ovvero

$$\Omega = \mathrm{V}(\lambda' . \mathrm{K}\lambda) \quad , \quad \Omega_1 = \mathrm{V}(\mathrm{K}\lambda' . \lambda) .$$

(²) Se, essendo λ un Rotor, e solo in tale ipotesi, si conviene di indicare con $\lambda^{\frac{1}{2}}$ il Rotor il cui quadrato è λ, allora $\lambda^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Rotor}(\varphi/2, \mathbf{u})$, e si ha

$$\Omega = \varphi'\mathbf{u} + 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{u}'$$

e formula analoga per Ω_1. Si hanno pure le formule notevoli

$$1 - \lambda = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\cdot\lambda^{\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{u}\wedge = -2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\mathbf{u}\wedge\lambda^{\frac{1}{2}}$$

$$1 + \lambda = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}} + 2\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{H}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

$$(1 + \lambda)^{-1} = \frac{1}{2}\left\{1 - \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cdot\mathbf{u}\wedge\right\} \quad \text{per } 1 + \lambda \text{ invertibile}$$

$$(\mathrm{C}\lambda)^{-1} = \frac{1}{2\cos\varphi}\left\{1 - \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{1 + \cos\varphi}\cdot\mathbf{u}\wedge\right\} \quad \text{pure per C}\lambda \text{ invertibile,}$$

e quest'ultima si ottiene dalla formula generale, per α omografia,

$$(\mathrm{C}\alpha)^{-1} = \{ I_1\alpha . \alpha + \mathrm{RK}\alpha \} / \{ I_1\alpha \; I_2\alpha - I_3\alpha \} .$$

Se n è un intero non nullo, positivo o negativo, allora λ^n, $K\lambda^n$ sono pure dei Rotor che si ottengono, rispettivamente, da Rotor$(\varphi \,.\, \mathbf{u})$ cambiando φ in $n\varphi$ ovvero $-n\varphi$. In virtù della [1] devono dunque esistere i vettori $\Omega^{(n)}$, $\Omega_1^{(n)}$, tali che

[1′] $$(\lambda^n)' = \Omega^{(n)} \wedge \lambda^n \quad , \quad (K\lambda^n)' = \Omega_1^{(n)} \wedge K\lambda^n .$$

La relazione tra i vettori $\Omega^{(n)}$, $\Omega_1^{(n)}$ e i vettori Ω, Ω_1 è data, per n *positivo*, da

[5] $$\Omega^{(n)} = (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1})\,\Omega \;,\; \Omega_1^{(n)} = (1 + K\lambda + \cdots + K\lambda^{n-1})\,\Omega_1 ,$$

ovvero, operando nei due membri con $1 - \lambda$ e $1 - K\lambda$,

[5′] $$(1-\lambda)\,\Omega^{(n)} = (1 - \lambda^n)\,\Omega \;,\; (1 - K\lambda)\,\Omega_1^{(n)} = (1 - K\lambda^n)\,\Omega_1 .$$

Inoltre, ricordando che $K\lambda = \lambda^{-1}$, per n positivo o negativo si ha subito, dalle [1′],

(6) $$\Omega^{(-n)} = \Omega_1^{(n)} \;,\; \Omega_1^{(-n)} = \Omega^{(n)} .$$

Dim. [1]. — Esse sono già note ([1]) e dimostrate in modo assai semplice. Un'altra dimostrazione, comunicatami dal prof. T. Boggio, è questa: Derivando la condizione $\lambda \,.\, K\lambda = 1$, si ha

$$\lambda' \,.\, K\lambda + \lambda \,.\, K\lambda' = 0 \quad , \quad \lambda' \,.\, K\lambda + K(\lambda' \,.\, K\lambda) = 0$$

la quale prova che $\lambda' \,.\, K\lambda$ è *omografia assiale*, cioè della forma $\Omega \wedge$.

Lo stesso prof. Boggio mi ha fatto notare che dalla prima delle [1] risulta immediatamente il teorema fondamentale del moto di corpo rigido. Invero, se i punti P, Q sono le posizioni al tempo t, dei punti iniziali P_0, Q_0, allora

$$P - Q = \lambda(P_0 - Q_0) ;$$

derivando si ha, per la [1],

$$P' - Q' = \Omega \wedge \lambda(P_0 - Q_0) \quad , \quad P' - Q' = \Omega \wedge (P - Q) .$$

Inoltre giova pure osservare che la prima delle [1] dà sotto forma assoluta semplicissima, e con formula *unica*, le *nove* equazioni del Poisson che esprimono le derivate dei coseni direttori degli assi mobili rispetto agli assi fissi ([2]).

Dim. [2]. — Ricordando che $R\lambda = \lambda$, dalla prima delle [1] si ha

$$K\lambda'\mathbf{a} = -K\lambda(\Omega \wedge \mathbf{a}) = -RK\lambda(\Omega \wedge \mathbf{a}) = -(K\lambda\Omega) \wedge K\lambda\mathbf{a}$$

([1]) A. Signorini, *Sulla dinamica dell'elettrone* (Nuovo Cimento, ser. VI, vol IV, fasc ott. e nov. 1912).

([2]) Anche da ciò può risultare l'assoluta inutilità degli assi fissi e mobili.

che, per essere $\mathbf{a}$ vettore arbitrario, dà $K\lambda' = -(K\lambda\Omega)_\wedge K\lambda$; e, per la seconda delle [1], si ha la [2].

Dim. [3]. — Derivando la [2] si ha

$$\Omega_1' = -K\lambda\Omega' - K\lambda'\Omega = -K\lambda\Omega' - \Omega_{1\wedge}K\lambda\Omega = -K\lambda\Omega' + \Omega_{1\wedge}\Omega_1 .$$

Dim. [4]. — Applicando la [1] ad $\mathbf{u}$, e ricordando che $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}$, si ha $\lambda'\mathbf{u} = \Omega_\wedge\mathbf{u}$. Operando con $\mathbf{u}_\wedge$ nei due membri, ed osservando che da $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{u}$ segue $\lambda'\mathbf{u} = \mathbf{u}' - \lambda\mathbf{u}'$, si ha subito

$$\begin{aligned}\Omega - \mathbf{u}\times\Omega\,.\,\mathbf{u} = \mathbf{u}_\wedge\lambda'\mathbf{u} = \mathbf{u}_\wedge(\mathbf{u}' - \lambda\mathbf{u}') &= \\ = \mathbf{u}_\wedge\{(1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}' - \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}_\wedge\mathbf{u}'\}&,\end{aligned}$$

tenuto anche conto che, per essere $\mathbf{u}$ unitario, $\mathbf{u}\times\mathbf{u}' = 0$; da questa si ha

$$(a) \qquad \Omega = \mathbf{u}\times\Omega\,.\,\mathbf{u} + \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}' + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}_\wedge\mathbf{u}' .$$

Resta da calcolare $\mathbf{u}\times\Omega$. È noto (mia Memoria, loc. cit.) che

$$\lambda' = \varphi'\,.\,\mathbf{u}_\wedge\lambda + 2(1-\cos\varphi)\,\mathrm{DH}(\mathbf{u}\,,\mathbf{u}) + \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}'_\wedge ,$$

da cui si ha

$$2\mathrm{V}\lambda' = \varphi'\mathrm{C}\lambda\mathbf{u} + 2\operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}' ;$$

ma dalla [1] si ha $2\mathrm{V}\lambda' = \mathrm{C}\lambda\Omega$, e quindi

$$(b) \qquad \mathrm{C}\lambda\Omega = \varphi'\mathrm{C}\lambda\mathbf{u} + 2\operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}' .$$

Moltiplicando $(\times)$ per $\mathbf{u}$, si ha

$$\mathrm{C}\lambda(\Omega - \varphi'\mathbf{u})\times\mathbf{u} = 0 \qquad (\Omega - \varphi'\mathbf{u})\times\mathrm{CK}\lambda\mathbf{u} = 0 ;$$

ma $\mathrm{CK}\lambda\mathbf{u}$ è vettore (non nullo) parallelo ad $\mathbf{u}$ e quindi

$$(\Omega - \varphi'\mathbf{u})\times\mathbf{u} = 0\,, \quad \text{cioè} \quad \Omega\times\mathbf{u} = \varphi'$$

il che dimostra la [4] (1).

(1) Da (b) si ha

$$\Omega = \varphi'\mathbf{u} + 2\operatorname{sen}\varphi\,.\,(\mathrm{C}\lambda)^{-1}\,\mathbf{u}' ,$$

da cui, per la formula generale (citata) che dà $(\mathrm{C}\alpha)^{-1}$, si ottiene ancora la [4] per $\mathrm{C}\lambda$ invertibile.

Si può anche dimostrare la [4] senza far uso della forma esplicita di λ'. Si ha $\mathrm{V}\lambda = \operatorname{sen}\varphi\,.\,\mathbf{u}$, e quindi $\mathbf{u}\times\mathrm{V}\lambda = \operatorname{sen}\varphi$. Derivando e ricordando che $\mathrm{V}\lambda$ è parallelo ad $\mathbf{u}$ (o è nullo) abbiamo

$$\varphi'\,.\cos\varphi = \mathbf{u}\times\mathrm{V}\lambda' + \mathbf{u}'\times\mathrm{V}\lambda = \mathbf{u}\times\mathrm{V}\lambda' ;$$

ma da $2\mathrm{V}\lambda' = \mathrm{C}\lambda\Omega$ si ricava

$$2\varphi'\,.\cos\varphi = \mathbf{u}\times\mathrm{C}\lambda\Omega = \Omega\times\mathrm{CK}\lambda\mathbf{u} = 2\cos\varphi\,.\,\mathbf{u}\times\Omega ,$$

che, per $\cos\varphi \neq 0$, dà ancora $\mathbf{u}\times\Omega = \varphi'$.

Con queste due dimostrazioni occorre ancora verificare la [4] per $\mathrm{C}\lambda$ non invertibile o per $\cos\varphi = 0$.

Dim. [5]. — Essendo a vettore arbitrario costante, ammessa la [5] per un valore positivo e non nullo di n, e ricordando che $R\lambda = \lambda$, si ha

$$\begin{aligned}(\lambda^{n+1}\mathbf{a})' &= (\lambda\,.\,\lambda^n\mathbf{a})' = \lambda(\Omega^{(n)}\wedge\lambda^n\mathbf{a}) + \Omega\wedge\lambda\,.\,\lambda^n\mathbf{a}\\ &= R\lambda(\Omega^{(n)}\wedge\lambda^n\mathbf{a}) + \Omega\wedge\lambda^{n+1}\mathbf{a} = (\lambda\Omega^{(n)})\wedge\lambda^{n+1}\mathbf{a} + \Omega\wedge\lambda^{n+1}\mathbf{a}\\ &= \{(1+\lambda+\cdots+\lambda^{n-1}+\lambda^n)\Omega\}\wedge\lambda^{n+1}\mathbf{a}\,.\end{aligned}$$

Se, dunque, la [4] è vera per n, essa è pure vera per $n+1$; ma è vera per $n=1$, e quindi è vera in generale.

Rotor *funzione di un punto.*

L'isomeria vettoriale $\lambda = \mathrm{Rotor}(\varphi\,,\mathbf{u})$ sia funzione del punto P variabile in un campo continuo a tre dimensioni.

Esistono le omografie vettoriali, funzioni pure di $P\,,\mu\,,\mu_1$, tali che

$$[7]\qquad d\lambda = (\mu\,dP)\wedge\lambda\quad,\quad dK\lambda = (\mu_1\,dP)\wedge K\lambda\,,$$

legate dalle relazioni

$$[8]\qquad \mu_1 = -K\lambda\,.\,\mu\quad,\quad \mu = -\lambda\mu_1$$

e la cui forma effettiva mediante φ ed $\mathbf{u}$, che sono pure funzioni di P, è

$$[9]\qquad \mu = \quad H(\mathrm{grad}\,\varphi\,,\mathbf{u}) + \mathrm{sen}\,\varphi\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dP} + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{u}}{dP}$$

$$[9']\qquad \mu_1 = -H(\mathrm{grad}\,\varphi\,,\mathbf{u}) - \mathrm{sen}\,\varphi\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dP} + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,.$$

Per n numero intero relativo non nullo, esistono le omografie vettoriali $\mu^{(n)}\,,\mu_1^{(n)}$ tali che

$$[7']\qquad d\lambda^n = (\mu^{(n)}dP)\wedge\lambda^n\quad,\quad dK\lambda^n = (\mu_1^{(n)}dP)\wedge K\lambda^n\,,$$

poichè $\lambda^n = \mathrm{Rotor}(n\varphi\,,\mathbf{u})$, cioè λ^n e $K\lambda^n$ sono pure dei Rotor.

Per n positivo, si ha

$$[10]\quad \mu^{(n)} = (1+\lambda+\cdots+\lambda^{n-1})\,\mu\;,\;\mu_1^{(n)} = (1+K\lambda+\cdots+K\lambda^{n-1})\,\mu_1\,,$$

$$[10']\quad (1-\lambda)\,\mu^{(n)} = (1-\lambda^n)\,\mu\qquad,\;(1-K\lambda)\,\mu_1^{(n)} = (1-K\lambda^n)\,\mu_1\,.$$

Si hanno inoltre le formule

$$[11]\qquad K\mu\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi\quad,\quad K\mu_1\mathbf{u} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$[12]\qquad \mathrm{Rot}\,\lambda = -(C\mu)\,\lambda\quad,\quad \mathrm{Rot}\,(K\lambda) = -(C\mu_1)\,K\lambda$$

$$[13]\qquad \mathrm{grad}\,\lambda = 2\lambda V\mu_1\quad,\quad \mathrm{grad}\,K\lambda = 2K\lambda V\mu\,,$$

e per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario, funzione di P o costante,

[14] $$\frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = (\mu\mathbf{x})\wedge\lambda \quad , \quad \frac{dK\lambda}{dP}\mathbf{x} = (\mu_1\mathbf{x})\wedge K\lambda$$

[14′] $$\frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x} = -\lambda\,.\,(\mu_1\mathbf{x})\wedge \quad , \quad \frac{dK\lambda}{dP}\mathbf{x} = -K\lambda\,.\,(\mu\mathbf{x})\wedge$$

[15] $$\frac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} - (\lambda\mathbf{x})\wedge\mu \quad , \quad \frac{d(K\lambda\mathbf{x})}{dP} = K\lambda\frac{d\mathbf{x}}{dP} - (K\lambda\mathbf{x})\wedge\mu_1 .$$

Dim. [7]-[10]. — Come per la [1], si prova che esiste un vettore $\boldsymbol{\Omega}_0$ funzione di P e di dP per il quale

$$d\lambda = \boldsymbol{\Omega}_0\wedge\lambda ;$$

come per la [4], si prova che

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_0 &= d\varphi\,.\,\mathbf{u} + \operatorname{sen}\varphi\,.\,d\mathbf{u} + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge d\mathbf{u}\\ &= H(\operatorname{grad}\varphi\,.\,\mathbf{u})\,dP + \operatorname{sen}\varphi\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,dP + (1-\cos\varphi)\,\mathbf{u}\wedge\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,dP.\end{aligned}$$

e quindi restano dimostrate le [7], [9]. Per le altre si opera come per le corrispondenti con λ funzione di t.

Dim. [11]. — Dalla [9] si ha

$$K\mu\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{sen}\varphi\,.\,K\frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{u} - (1-\cos\varphi)\frac{d\mathbf{u}}{dP}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}) ;$$

ma $\mathbf{u}\wedge\mathbf{u} = 0$, e, per essere $\mathbf{u}^2 = 1$, $K\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{u} = 0$, e quindi la [10] è dimostrata.

Dim. [12]. — Se $\mathbf{a}$ è vettore costante, si ha

$$d(\lambda\mathbf{a}) = d\lambda\,.\,\mathbf{a} = (\mu\,dP)\wedge\lambda\mathbf{a} = -(\lambda\mathbf{a})\wedge\mu\,dP ,$$

e quindi

(*a*) $$\frac{d(\lambda\mathbf{a})}{dP} = -(\lambda\mathbf{a})\wedge\mu ;$$

operando con 2V, si ha

$$2V\frac{d(\lambda\mathbf{a})}{dP} = -(C\mu)\,\lambda\mathbf{a} \quad , \quad \operatorname{rot}(\lambda\mathbf{a}) = -(C\mu)\,\lambda\mathbf{a}$$

$$(\operatorname{Rot}\lambda)\,\mathbf{a} = -(C\mu)\,\lambda\mathbf{a}$$

che, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, dimostra la [12].

Dim. [13]. — La (a) vale cambiando λ in $K\lambda$ e μ in μ_1; quindi, ricordando che

$$\operatorname{grad} \lambda \times \mathbf{a} = I_1 \frac{d(K\lambda\mathbf{a})}{dP},$$

si ha

$$\operatorname{grad} \lambda \times \mathbf{a} = I_1 \{ -(K\lambda\mathbf{a}) \wedge \mu_1 \} = 2(K\lambda\mathbf{a}) \times V\mu_1 = (2\lambda V\mu_1) \times \mathbf{a}$$

che, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, dimostra la [13].

Dim. [14]. — Dalla (a) si ha

$$\frac{d(\lambda\mathbf{a})}{dP}\mathbf{x} = -(\lambda\mathbf{a}) \wedge \mu\mathbf{x} \quad , \quad \left(\frac{d\lambda}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{a} = (\mu\mathbf{x}) \wedge \lambda\mathbf{a}$$

che dimostra le [14]. Operando in queste con K, si ottengono le [14′].

Dim. [15]. — Si ha

$$d(\lambda\mathbf{x}) = d\lambda \, . \, \mathbf{x} + \lambda \, d\mathbf{x} = (\mu \, dP) \wedge \lambda\mathbf{x} + \lambda \, d\mathbf{x}$$

$$= \lambda \frac{d\mathbf{x}}{dP} dP - (\lambda\mathbf{x}) \wedge \mu \, dP \text{ (}^1\text{)}.$$

Osservazioni.

a) Gli *anti-rotor* (cfr. mia Memoria, loc. cit., pag. 15) sono legati ai Rotor dalla relazione

$$\mathbf{a} \operatorname{Rotor}(\varphi, \mathbf{u}) = -\operatorname{Rotor}(\pi + \varphi, \mathbf{u}),$$

e quindi le loro derivate ecc. si ottengono dalle formule precedenti.

b) Le *similitudini vettoriali* (A. V. G., vol. I, pag. 40) sono tutte della forma $x\lambda$, ove x è *numero reale* e λ è isomeria vettoriale (cioè Rotor o a-Rotor). Le derivate ecc. di queste si calcolano ancora con le formule precedenti.

(1) Si ha $(\lambda\mathbf{x}) \wedge \mu = (\lambda\mathbf{x}) \wedge (\lambda . K\lambda . \mu) = R\lambda \{ \mathbf{x} \wedge (K\lambda . \mu) \} = -\lambda(\mathbf{x} \wedge \mu_1)$, e quindi la [15] può assumere la forma

$$\frac{d(\lambda\mathbf{x})}{dP} = \lambda\left(\frac{d\mathbf{x}}{dP} + \mathbf{x} \wedge \mu_1\right).$$

Per λ funzione di P variabile in una superficie si confronti M. Bottasso, loc. cit., e si noti che si ha anche

$$d\lambda = H(\mathbf{N}, \nu \, dP) - H(K\nu . \lambda \, dP, \lambda\mathbf{N}) \quad \text{con} \quad \nu = \sigma_0 \lambda - \lambda\sigma.$$

Dello stesso autore si consulti pure *Sull'operatore binario* S *di M. Pieri* (Rendiconti R. Accad. Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem., pp. 659-665, an. 1914) per ottenere in altro modo la [15].

c) Tra le similitudini vettoriali, $x\lambda$, sono da considerarsi quelle che dànno luogo alle *rappresentazioni conformi*, cioè le $x\lambda$ per le quali

$$x\lambda = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathrm{P}} . \tag{1}$$

Esamino la questione, senza risolverla, supposto che λ sia un Rotor. Affinchè la (1) sia soddisfatta è necessario e sufficiente (A. V. G., vol. I, pag. 118) che

$$\mathrm{Rot}(\mathrm{K}x\lambda) = 0 ,$$

cioè che (cfr. la [12])

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Rot}(x \,.\, \mathrm{K}\lambda) &= x \,\mathrm{Rot}\, \mathrm{K}\lambda + \mathrm{grad}\, x \wedge \mathrm{K}\lambda \\ &= - x(\mathrm{C}\mu_1)\, \mathrm{K}\lambda + \mathrm{grad}\, x \wedge \mathrm{K}\lambda , \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\mathrm{C}\mu_1 = (\mathrm{grad}\log x)\wedge$$

$$\mu_1 = \mathrm{C}^{-1} \{(\mathrm{grad}\log x)\wedge\} = -(\mathrm{grad}\log x)\wedge .$$

Ne segue che le $x\lambda$ per le rappresentazioni conformi *dirette* sono della forma

$$he^{-m_1}\lambda ,$$

ove h è numero reale costante, m_1 è numero reale funzione di P, e λ è un Rotor tale che $\mu_1 = (\mathrm{grad}\, m_1)\wedge$.

Matematica. — *Sur les ondes liquides*. Nota di J. HADAMARD, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

J'ai, dans un précédent travail ([1]), montré que l'équation des petits mouvements de la surface libre d'un liquide (équation qui définit l'altitude z de la surface au dessus de la position d'équilibre, en fonction des coordonnées horizontales x, y) n'était pas une équation aux dérivées partielles, mais un équation *intégro-différentielle*. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{4\pi}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint \frac{z'}{r}\, dx'\, dy' + \iint z' \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z\, \partial z'}\, dx'\, dy' , \tag{1}$$

en désignant par (x', y', z') un second point quelconque P de la surface libre;

par r la distance des ces deux points;

par r_1 la distance d'un de ces points à l'image de l'autre prise relativement au plan $z = 0$;

([1]) Comptes Rendus de l'Ac. des sc. de Paris, du 21 mars 1910. Voir Bouligand, Bull. de la Soc. math. de France, 1912. Les mêmes principes sont au fond employés dans les travaux antérieurs de Poincaré et de M. Volterra sur cette question.