ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

c) Tra le similitudini vettoriali, $x\lambda$, sono da considerarsi quelle che dànno luogo alle *rappresentazioni conformi*, cioè le $x\lambda$ per le quali

$$x\lambda = \frac{d\mathbf{x}}{dP} . \tag{1}$$

Esamino la questione, senza risolverla, supposto che λ sia un Rotor.

Affinchè la (1) sia soddisfatta è necessario e sufficiente (A. V. G., vol. I, pag. 118) che

$$\mathrm{Rot}(Kx\lambda) = 0 ,$$

cioè che (cfr. la [12])

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Rot}(x \,.\, K\lambda) &= x \,\mathrm{Rot}\, K\lambda + \mathrm{grad}\, x \wedge K\lambda \\ &= -x(C\mu_1)\, K\lambda + \mathrm{grad}\, x \wedge K\lambda , \end{aligned}$$

da cui si ha

$$C\mu_1 = (\mathrm{grad} \log x)\wedge$$

$$\mu_1 = C^{-1} \{(\mathrm{grad} \log x)\wedge\} = -(\mathrm{grad} \log x)\wedge .$$

Ne segue che le $x\lambda$ per le rappresentazioni conformi *dirette* sono della forma

$$he^{-m_1}\lambda ,$$

ove h è numero reale costante, m_1 è numero reale funzione di P, e λ è un Rotor tale che $\mu_1 = (\mathrm{grad}\, m_1)\wedge$.

Matematica. — *Sur les ondes liquides.* Nota di J. HADAMARD, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

J'ai, dans un précédent travail (1), montré que l'équation des petits mouvements de la surface libre d'un liquide (équation qui définit l'altitude z de la surface au dessus de la position d'équilibre, en fonction des coordonnées horizontales x, y) n'était pas une équation aux dérivées partielles, mais un équation *intégro-différentielle*. Cette équation peut s'écrire

$$\frac{4\pi}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint \frac{z'}{r}\, dx'\, dy' + \iint z' \frac{\partial^2 H}{\partial z\, \partial z'}\, dx'\, dy' , \tag{1}$$

en désignant par (x', y', z') un second point quelconque P de la surface libre;

par r la distance des ces deux points;

par r_1 la distance d'un de ces points à l'image de l'autre prise relativement au plan $z = 0$;

(1) Comptes Rendus de l'Ac. des sc. de Paris, du 21 mars 1910. Voir Bouligand, Bull. de la Soc. math. de France, 1912. Les mêmes principes sont au fond employés dans les travaux antérieurs de Poincaré et de M. Volterra sur cette question.

par

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + H(x, y, z; x', y', z') \tag{2}$$

la fonction de Green du problème mixte consistant à déterminer une fonction harmonique au moyen de seu valeurs sur la surface libre et de celles de sa dérivée normale le long de la paroi mouillée.

Or, d'autre part, lorsque la profondeur h est uniforme et très petite, Lagrange a donné, pour le même problème, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = gh\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right). \tag{3}$$

Ce résultat est obtenu par une étude directe du mouvement dans tout l'intérieur du fluide. Mais, de plus, le fait que la profondeur est très petite est utilisé, tant par Lagrange que depuis lui (voir, en particulier, la *Théorie des marées* de Poincaré), à l'aide d'une méthode classique en pareille circonstance, mais qui soulève néammoins de graves objections, puis qu'elle conduit à developper les inconnues suivant les puissances de la profondeur et à négliger tous les termes d'ordre supérieur, bien que l'ordre de grandeur des coëfficients de ces termes soit totalement inconnu. En fait, comme on le sait déjà et comme nous allons le retrouver, le résultat lui-même n'a lieu que conditionnellement.

Je me propose d'établir ce résultat en partant de l'équation (1).

Supposons le fluide indéfini dans le sens horizontal.

Il n'ya aucune difficulté à former pour le volume d'un tal fluide, c'est à dire pour le domaine limité par deux plans horizontaux parallèles, la fonction de Green G. Il suffit d'appliquer la méthode des images. On est ainsi conduit à introduire la quantité

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{r} - \frac{2}{\sqrt{r^2 + 4h^2}} + \cdots + 2\frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2 + 4n^2h^2}} \cdots, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{r^2 + 4n^2h^2}} : \end{aligned} \tag{4}$$

moyennant laquelle, (1) s'écrit aisément

$$2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \iint \Gamma(x, y, x', y')\, \Delta z'\, dx'\, dy'. \tag{1^{bis}}$$

Toute la question revient à connaître l'ordre de grandeur de cette quantité Γ, ordre de grandeur masqué dans l'expression (4) par la destruction mutuelle des termes.

Le moyen d'arriver à ce résultat nous cest fourni par le calcul des résidus (voir l'ouvrage consacré à ce sujet par M. Lindelöf, dans la collection de M. Borel; Paris, Gauthier-Villars). La summe (4) peut être remplacée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,du\,.\,\frac{\pi}{\sin \pi u} \quad , \quad f(u)=\frac{1}{\sqrt{r^2+4u^2h^2}}$$

prise suivant un contour entourant tout l'axe réel.

Des transformations simples nous donnent ainsi

$$(5) \qquad \Gamma = 2\int_{\frac{r}{2h}}^{\infty} \cdot \frac{dv}{\sqrt{4v^2h^2-r^2}\,\mathrm{S}(\pi v)},$$

S désignant un sinus hyperbolique.

Ceci fait, aucune difficulté ne subsiste plus. En raison de la présence du facteur sinus hyperbolique au dénominateur, la partie d'integrale dans laquelle r est du même ordre de grandeur que h, subsiste seule. Sidonc h est petit, on peut identifier $\Delta z'$ avec Δz *pourvu que les variations de* Δz *ne soient pas très rapides*, et on tombe bien sur (3).

On voit que, dans cette manière d'opérer, l'hypothèse de la petitesse de h n'est introduite qu'en dernière analyse, la calcul fournissant tout d'abord des formules rigouruses quel-que-soit h; et que, de plus, nous pouvons mettre en évidence avec précision et simplicité les conditions de légitimité de l'équations de Lagrange, laquelle, dans certains cas, est, en fait, mise en défaut.

L'application de (2^{bis}) [avec la valeur (5) de Γ] au cas de h fini fournit également les résultats connus pour ce dernier cas, spécialement en ce qui regarde les ondes rectilignes. Il suffit de supposer z indépendant de y. Si, de plus, on admet une propagation de vitesse constante V, de sorte que $z=f(x-\mathrm{V}t)$, on trouve une équation intégrale de la forme

$$(6) \qquad \mathrm{V}^2 f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f''(\xi)\log\left|\mathrm{T}\left(\frac{(x-\xi)}{2}\right)\right| d\xi\,.$$

où T désigne une tangente hyperbolique.

Cette dernière équation appartient à la même catégorie générale qu'une de celles qui ont été précédemment considérées par M. Picard: elle est, en effet, de la forme

$$(7) \qquad \lambda\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,\mathrm{K}(|x-\xi|)\,d\xi$$

avec $\mathrm{K}(u)=\log \mathrm{T}(u)$.

Dans le cas de $\mathrm{K}(u)=e^{-mu}$, M. Picard a montré que l'équation (7) admet des solutions non nulles pour une infinité *continue* de valeurs de λ (contrairement aux résultats classiques de Fredholm).

La remarque ainsi obtenue *s'étend à toutes les équations du type* (7) (pourru que la fonction K ait une décroissance convenable à l'infini).

Soit, en effet, s un nombre réel quelconque; l'équation (7) admet la solution $\varphi(x) = \begin{cases} \cos sx \\ \sin sx \end{cases}$, pourra que l'on ait

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos s\xi \, \mathrm{K}(|\xi|) \, d\xi = 2 \int_0^{\infty} \cos s\xi \, \mathrm{K}(\xi) \, d\xi \;;$$

ce qui, en faisant varier s, fournit bien une infinité continue de valeurs de λ.

Ce sont ces solutions qui, pour l'équation (6), fournissent les ondes classiques des bassins à profondeur constante.

Par contre, rien ne dit que cette equation n'admet pas d'autres solutions, où la fonction φ ne soit pas trigonométrique, et qui donnent, par conséquent, des ondes progressives de forme différente, analogues à l'onde solitaire. C'est ce qui arriverait pour l'équation de M. Picard, dont la solution fournie par son auteur est exponentielle et non trigonométrique.

Je terminerai en ajoutant, sans entrer dans le détail:

1°) que si le liquide n'était pas indéfini dans le sens horizontal, il foudrait partir de la fonction de Green relative à un liquide de hauteur ph (p étant un entier assez grand pour que cet hauteur soit finie) et opérer sur elle comme nous l'avons fait sur $\frac{1}{r}$ pour obtenir Γ;

2°) que si la profondeur n'était pas constante, il faudrait appliquer les formules de variation que j'ai établies autrefois (voir mes *Leçons sur le calcul des variations*) relativement aux fonctions de Green.

Astronomia. — *Osservazioni di comete fatte negli anni 1914 e 1915 all'equatoriale Dembowski di 187 m.m. del r. Osservatorio astronomico di Padova.* Nota di B. Viaro, presentata dal Socio E. Millosevich.

Le presenti osservazioni sono state fatte in continuazione di altre già pubblicate nelle «Astronomische Nachrichten», nn. 4726, 4793, 4817.

Esse riguardano le comete:

1914 *b* (Zlatinsky)
1913 *f* (Delavan)
1915 *a* (Mellish)

nell'ordine dei quadri che seguono: