ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Dai valori registrati nelle due tabelle risulta:

1°) che il succo di sostanza grigia ha un indice di refrazione, un tempo di deflusso per il capillare di un viscosimetro, una tensione superficiale, un contenuto in azoto e in fosforo, maggiori di quelli del succo di sostanza bianca;

2°) che il succo di sostanza grigia ha una conduttività elettrica, un abbassamento del punto di congelamento, un residuo secco, un peso specifico, una concentrazione degl' idrogenioni, minori di quelli del succo di sostanza bianca;

3°) che il succo di sostanza grigia, per quanto riguarda la conduttività elettrica (non ostante il suo maggior contenuto in sostanze proteiche), l'abbassamento del punto di congelamento e la concentrazione degl' idrogenioni, somiglia al siero del sangue più del succo di sostanza bianca (probabilmente, almeno in parte, perchè la sostanza grigia contiene più sangue che non la bianca);

4°) che per quanto riguarda il residuo secco, il contenuto in fosforo e la tensione superficiale, non esistono differenze degne di nota fra i due succhi;

5°) che l'indice di refrazione e il tempo di deflusso del succo di sostanza grigia sono maggiori di quelli del succo di sostanza bianca, probabilmente a causa del maggior contenuto in sostanze proteiche.

Chimica. — *L'acido grafitico*. Memoria del Corrisp. L. Balbiano.

Storia della Chimica. — *La teoria atomica e Sebastiano Basso*. Memoria del Corrisp. I. Guareschi.

Questo due lavori saranno pubblicati nei volumi delle *Memorie*.

Matematica. — *Sull'integrazione delle trasformazioni*. Nota del dott. Giulio Andreoli, presentata dal Socio V. Volterra.

In questa breve Nota mi permetto di svolgere alcune considerazioni sull'estensione del concetto di integrazione delle sostituzioni, dato dal professor Volterra ([1]), e sulle sue applicazioni.

1. Cominciamo dal passare dall' integrazione delle sostituzioni a quella delle trasformazioni.

Siano

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \varphi_1(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_\nu) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x'_n = \varphi_n(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_\nu) \end{array} \right.$$

([1]) *Leçons sur les fonctions de lignes*, pag. 36 e seg.; *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari* (Rend. Circ. Mat. Pal., tomo II, 1888); *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* (Mem. Soc. It. Sc., serie 3ª, tomi VI e XII).

le formole che definiscono un certo gruppo del Lie; supporremo che l'inversa d'ogni trasformazione del gruppo appartenga ancora al gruppo, e, almeno per ora, che il gruppo stesso sia finito.

Se nel campo (a) di esistenza del gruppo le φ risultassero polidrome, supporremo fatti gli opportuni tagli per ripristinare la monodromia.

Le a sieno scelte in modo che, per $a_1 = a_2 = \cdots = a_\nu = 0$, le funzioni φ si annullino identicamente, si abbia cioè la trasformazione degenere $x'_r = 0$; ed infine $\alpha_1, \ldots \alpha_\nu$ siano i parametri della sostituzione identica. Indicheremo la prima col simbolo O, la seconda col simbolo I.

Rappresenteremo inoltre la trasformazione (1) col simbolo T o con il gruppo di lettere $(a_1 \ldots a_\nu)$: chiameremo queste la « *matrice* » della trasformazione. Potrà talvolta accadere che le a_ν si spezzino in r sistemi: le prime sole compaiano nella φ_1; le a del secondo sistema compaiano sole nella φ_3, e così via. Tale è il caso delle sostituzioni lineari.

Per prodotto di due matrici $(a_1 \ldots a_\nu)$, $(b_1 \ldots b_\nu)$, intenderemo la matrice $G \equiv (c_1 \ldots c_\nu)$, corrispondente al prodotto delle due trasformazioni; come somma di due matrici A, B, intenderemo la matrice

$$G \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_\nu + b_\nu) \equiv A + B.$$

Supponiamo ora che le a sieno tutte funzioni d'una variabile z; la matrice A sarà funzione di z:

$$A = A(z).$$

Conveniamo ancora di indicare con mA la matrice

$$C \equiv (ma_1, ma_2, \ldots ma_\nu).$$

2. Consideriamo ora le due matrici

$$\lim_{h=0} \left\{ \frac{1}{h} \Big(A(z+h) \cdot A(z)^{-1} - I \Big) \right\} \; ; \quad \lim_{h=} \left\{ \frac{1}{h} \Big(A(z)^{-1} A(z+h) - I \Big) \right\}.$$

Esse esistono effettivamente, poichè sono rispettivamente eguali a

$$\left[\lim_{h=0} \left\{ \frac{1}{h} \Big(A(z+h) - A(z) \Big) \right\} \right] A(z)^{-1} \; ; \; A(z^{-1}) \left[\lim_{h=0} \left\{ \frac{1}{h} \Big(A(z+h) - A(z) \Big) \right\} \right];$$

ed essendo

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} \Big(A(z+h) - A(z) \Big),$$

per le definizioni date, null'altro che

$$A' \equiv \Big(a'_1(z), a'_2(z), \ldots a'_\nu(z) \Big),$$

esisteranno i limiti suddetti: li chiameremo, rispettivamente, derivata a sinistra, e derivata a destra della matrice A, segnando

$$\frac{d}{dz} A(z) \quad ; \quad A(z) \frac{d}{dz}.$$

In modo perfettamente analogo si può definire l' integrale d'una trasformazione. Procedendo nel solito modo, si divida l'intervallo (a, b) in n parti $h_1, h_2, h_3, \dots h_n$; sieno $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$, punti interni ad esse; formiamo i due prodotti

$$\big(I + h_1 A(\zeta_1)\big)\big(I + h_2 \; A(\zeta_2) \;\big)\big(I + h_3 \; A(\zeta_3) \;\big) \dots\dots$$

$$\big(I + h_n A(\zeta_n)\big)\big(I + h_{n-1} A(\zeta_{n-1})\big)\big(I + h_{n-2} A(\zeta_{n-2})\big) \dots\dots$$

Se, scegliendo in un modo qualunque gli intervalli h, purchè tendenti a zero al crescere di n, i due limiti di quei prodotti esistono, noi diremo d'aver formato gli integrali a destra, ed a sinistra.

Come nell' integrazione delle sostituzioni, anche qui si può estendere la maggior parte dei teoremi dell'ordinario calcolo integrale. Così, ad esempio, diciamo che una trasformazione (o una matrice) A differisce da una trasformazione (o matrice) B per meno di ε, se

$$|a_1 - b_1| < \varepsilon, \dots, |a_\nu - b_\nu| < \varepsilon.$$

Avremo che, nel campo in cui le formole di trasformazioni (1) sono definite da funzioni φ sviluppabili in serie di Taylor, scelto un valore ε piccolo ad arbitrio, ed un numero ϱ, anche esso piccolo ad arbitrio, si potrà trovare un numero σ, tendente a zero con ε e ϱ, tale che, per

$$|x_1 - \xi_1| < \varrho, \dots\dots, |x_n - \xi_n| < \varrho$$
$$|a_1 - b_1| < \varrho, \dots\dots, |a_\nu \;\; b_\nu| < \varepsilon,$$

sia anche

$$|x_1' - \xi_1''| < \sigma, \dots\dots, |x_n' - \xi_n''| < \sigma$$

ove

$$x_n' = \varphi_r(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_\nu) \quad ; \quad \xi_r'' = \varphi_r(\xi_1 \dots \xi_n, b_1 \dots b_\nu);$$

sarà allora facile esprimere le condizioni di integrabilità d'una trasformazione, servendosi della oscillazione della trasformazione stessa.

3. Un' immediata applicazione si riscontra nella teoria di certe equazioni differenziali; le potremo sempre supporre del primo ordine, senza ledere la generalità.

Sia assegnato un sistema d'equazioni differenziali:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1 \dots y_n, x) \\ &\dots\dots \\ y_n' &= f_n(y_1 \dots y_n, x) \end{aligned}$$

Noi potremo scriverle sotto la forma

$$\begin{cases} y_1(x+dx) = y_1(x) + dx\, f_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x+dx) = y_n(x) + dx\, f_n \end{cases}$$

Sotto tale aspetto, l'equazione differenziale appare come una trasformazione che, operando sugli n valori $y_1, \dots y_n$, ci dà i valori $y_1(x+dx), \dots$

Se dunque le espressioni

$$y_r + dx\, f_r$$

sono tali da considerarsi come trasformazioni infinitesime d'un certo gruppo operante sulle variabili $y_1, \dots y_n$, vediamo proprio che ci troviamo nelle condizioni da noi date per la definizione di integrale: *Occorre perciò che esista un certo gruppo di trasformazioni del tipo* (1), *tale che la trasformazione*

$$y'_1 = y_1 + dx\, f_1, \dots, y'_n = y_n + dx\, f_n$$

possa considerarsi eguale alla trasformazione definita dalla matrice

$$\mathrm{I} + dx\, \mathrm{A}(x)\,.$$

In tal caso, l'integrazione della trasformazione ci condurrà alla conoscenza degli integrali della (2).

Si può indi passare all'integrazione delle trasformazioni nel campo dei valori complessi della variabile $z = x + iy$: ed allora si vede che i valori che assumono n integrali della (2), dopo un giro attorno a qualche punto singolare, sono precisamente legati ai valori iniziali da relazioni del tipo (1), ove alle costanti si assegnino convenienti valori.

A tali equazioni, seguendo il metodo usato dal prof. Volterra nei suoi lavori, si potranno estendere, generalizzandoli, i resultati noti sulle equazioni differenziali lineari (che formano un caso particolare di questa classe).

4. Lo stesso concetto d'integrazione si può applicare anche ad altri casi, in cui non sono soddisfatte le condizioni gruppali ora accennate: esso permette di ricavare da integrali di equazioni differenziali del primo ordine e con una funzione incognita, gli integrali di sistemi d'equazioni differenziali; e ci permette anche la trasformazione di equazioni integro-differenziali in equazioni integrali.

Per dare un esempio, consideriamo l'equazione differenziale-funzionale

$$\varphi'(x) = \varphi(\alpha x) \qquad (|\alpha| \leq 1)$$

Sia ω il valore che la φ assume per $x = 0$. Con lo sviluppo in serie, è facile vedere che essa ammette una sola soluzione che ammetta uno sviluppo di Laurent nell'intorno di $x = 0$; ed in tal caso, anzi, lo sviluppo di Laurent si riduce a quello di Taylor. Quindi, una soluzione della detta equazione, se non ammette uno spazio lacunare comprendente lo zero e l'∞, rappresenta una funzione olomorfa: e precisamente

$$\varphi(x) = \omega \cdot \sum_0^\infty \frac{\alpha^{\frac{n.n-1}{2}} \cdot x^n}{n!} = \omega \cdot g(x),$$

ove ω è il valore $\varphi(0)$.

Ora, a questo stesso risultato si sarebbe giunti con l'integrazione dell'operazione $\Omega\varphi(x) = \varphi(\alpha x)$. La data equazione si può infatti scrivere:

$$\varphi'(x) = \Omega\varphi(x) \quad ; \quad \varphi(x + dx) = \varphi(x) + dx \, . \, \Omega\varphi(x) ;$$

e se notiamo che la Ω è un'operazione lineare, e quindi distributiva rispetto alla somma, noi avremo successivamente

$$\begin{aligned}\varphi(x + 2dx) &= \varphi(x + dx) + dx\, \Omega\varphi(x + dx) = \\ &= \varphi(x) + 2dx\, \Omega\varphi(x) + \Omega\, dx \cdot \Omega^2\varphi(x) ,\end{aligned}$$

e così via.

Ponendo poi $x = 0$ ed integrando l'operazione Ω nell'intervallo $(0 , x)$, si troverebbe appunto che

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x\varphi(0)}{1!} + \frac{x\Omega(x\omega(0))}{2!} + \frac{x\Omega(x(\Omega(x\omega(0))))}{3!} + \cdots$$

che è proprio la soluzione assegnata.

Se, invece di una sola equazione, si avesse il sistema

$$\varphi_s'(x) = \sum_1^n \alpha_{sr}\, \varphi_r(\alpha x) \qquad (s = 1 , 2 , \ldots x)$$

noi potremo dire che, chiamati ω_r i valori $\varphi_r(0)$, ed imponendo alle φ le stesse condizioni di analiticità, l'integrazione del sistema si riconduce a quella dell'equazione.

Infatti, se indichiamo con $\Omega(x)$ l'operazione che dai valori $\varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)$ ci fa passare ai valori $\sum_1^n \alpha_{1r}\, \varphi_r(\alpha x)$, $\sum_1^n \alpha_{2r}\, \varphi_r(\alpha x)$, ..., si vede facilmente che dai valori $\varphi_r(0)$ passeremo ai valori $\varphi_r(x)$ proprio mediante l'operazione:

$$1 + \frac{x \cdot}{1!} + \frac{x \cdot \Omega(x)}{2!} + \frac{x \cdot \Omega(x) \cdot \Omega^2(x)}{3!} + \cdots ,$$

in completa analogia con la formula dianzi scritta.

Se notiamo inoltre che, scelti n gruppi di valori iniziali, linearmente indipendenti,

$$\omega_1' , \ldots \omega_n' \; ; \; \omega_1'' , \ldots \omega_n'' \; ; \; \ldots \; \omega_1^{(n)} , \ldots \omega_n^{(n)} ,$$

un gruppo generico $\omega_1 \ldots \omega_n$ di valori iniziali si potrà sempre esprimere mediante combinazioni lineari delle $\omega', \omega'', \ldots$; si potrà avere cioè che

$$\omega_r = \mathrm{H}\lambda\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

intendendo con tale notazione di avere applicato alle costanti λ la trasformazione lineare di cui

$$\mathrm{H} \equiv \left\| \begin{matrix} \omega'_1 \ldots\ldots \omega'_n \\ \omega_1^{(n)} \ldots\ldots \omega_n^{(n)} \end{matrix} \right\|$$

è la matrice.

Si deduce quindi, in virtù della formola di soluzione da noi assegnata, che *fra* $n+1$ *soluzioni del sistema dato passa sempre una relazione a coefficienti costanti, lineare.*

In particolare, cerchiamo di determinare le costanti λ in modo che si abbia

$$\frac{\varphi_r(x)}{\varphi_s(x)} = \text{costante}). \qquad (r, s = 1, \ldots n)$$

Poniamo $\varphi_r(x) = k_r\, g(\zeta x)$, ove g è la funzione data poc'anzi. Notiamo che

$$\frac{1}{k_r}\,\varphi'_r(x) = g'(\zeta x) = \frac{dg(\zeta x)}{dx} = \frac{dg(\zeta x)}{d\zeta x} \cdot \zeta = \zeta \cdot g(\zeta x)\,;$$

quindi, il sistema dato diventa

$$k_r \cdot \zeta \cdot g(\zeta x) = \left(\sum_1^n a_{rs}\, k_s\right) g(\zeta x)\,, \qquad (r = 1, \ldots n)$$

che, per essere soddisfatto, richiede

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \zeta)\, k_1 + a_{12}\, k_2 \qquad + \cdots = 0 \\ a_{21}\, k_1 \qquad + (a_{22} - \zeta)\, k_2 + \cdots = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}\, k_1 \qquad + \cdots + (a_{nn} - \zeta)\, k_n = 0\,. \end{array} \right.$$

Ossia si deve avere che il determinante dei coefficienti si annulli; ζ *deve essere radice di* $\mathrm{D}(\zeta) = 0$.

Come si vede, ciò presenta una perfetta identità con la teoria dei sistemi differenziali ordinarî a coefficienti costanti: cui del resto si riduce la equazione scritta, per $\alpha = 1$.

In modo perfettamente simile si procederebbe in altri casi.