ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Successioni di curve e derivazione per serie.* Nota II di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Nella Nota precedente [1] stabilimmo una proposizione sulla derivazione per serie che ora vogliamo generalizzare, nel senso di togliere la condizione della convergenza quasi dappertutto della successione delle derivate. Dalla generalizzazione così ottenuta dedurremo alcune conseguenze relative al comportamento, per $n \longrightarrow \infty$, dell'integrale di una funzione dipendente dai valori della x, della $u_n(x)$ e della $u'_n(x)$. Daremo, infine, una nuova dimostrazione del teorema di G. Fubini, già dimostrato nell'ultimo numero della Nota precedente.

1. Stabiliamo la seguente proposizione:

« *Se la successione di funzioni* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, *date in* (a, b), *converge quasi dappertutto verso una funzione* $u(x)$; *se, inoltre, la lunghezza, supposta finita, della curva* $y = u_n(x)$ *tende a quella, pure finita, di* $y = u(x)$, *allora la successione delle devivate*

$$u'_1(x), u'_2(x, \ldots, u'_n(x), \ldots,$$

considerate solamente là dove esistono, converge in misura verso la derivata $u'(x)$ ».

Ripetendo qui le considerazioni fatte al principio del n. 7 della Nota I, abbiamo che le curve C_n $(n = 0, 1, 2 \ldots)$, ottenute aggiungendo ai punti di $y = u_n(x)$ $(u_0(x) \equiv u(x))$ i segmenti paralleli all'asse delle y che hanno per estremi $(x, u_n(x-0))$ e $(x, u_n(x))$, $(x, u_n(x))$ e $(x, u_n(x+0))$, convergono uniformemente verso la C_0, per $n \longrightarrow \infty$, e le tangenti t_n della C_n convergono in misura verso quelle t_0 della C_0, e ciò secondo la corrispondenza fissata dalla rappresentazione analitica simultanea delle C_n:

$$(1) \qquad x = f_n(s), \; y = g_n(s), \; z = h_n(s), \quad (0 \leq s \leq L_0) \; (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

dove $\frac{L_n}{L_0} s$ dà la lunghezza dell'arco della C_n che va dal suo primo estremo al punto corrispondente ad s, essendosi indicata con L_n la lunghezza di tutta la curva C_n.

Scelti ad arbitrio due numeri positivi σ ed ε, indichiamo con E_ε un insieme chiuso di punti di $(0, L_0)$, di misura $> L_0 - \varepsilon$, sul quale la tan-

[1] Questi Rendiconti, gennaio 1916.

gente alla C_0 esista e varii con continuità, facendo con la direzione positiva dell'asse delle x un angolo sempre minore, in modulo, di $\frac{\pi}{2}$.

Ai punti di E_ε corrispondono, sulla C_0, dei punti che formano un insieme di misura (contata sulla curva stessa) uguale a $m(E_\varepsilon)$ e che si proiettano ortogonalmente sull'asse delle x in un insieme I_ε di misura $> (b - a) - \varepsilon$. L'insieme I_ε è chiuso e su esso la $u'(x)$ varia con continuità ed è perciò uniformemente continua; possiamo dunque fissare un $\delta > 0$ tale che sia $|u'(x) - u'(x_1)| < \sigma$ per ogni coppia di valori x, x_1, appartenenti a I_ε e soddisfacenti alla disuguaglianza $|x - x_1| < \delta$. Indichiamo con σ_1 un numero positivo $< \sigma$ e tale che si abbia $|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1| < \sigma$ tutte le volte che è $|\alpha - \alpha_1| < \sigma_1$ e inoltre $|\alpha| \leq$ del limite superiore dei moduli degli angoli che le tangenti alla C_0 nei punti corrispondenti a E_ε formano con la direzione positiva dell'asse x. Determiniamo poi il primo intero positivo n_1, a partir dal quale sia per ogni n $(n > n_1)$: 1°) $L_n < 2L_0$; 2°) la distanza fra due qualunque punti corrispondenti di C_0 e $C_n < \delta$; 3°) $m(E_{\varepsilon,n}) > m(E_\varepsilon) - \varepsilon$, dove $E_{\varepsilon,n}$ indica il componente di E_ε nei punti del quale la tangente t_n alla C_n esiste e fa, con la corrispondente tangente t_0 di C_0, un angolo $< \sigma_1$. Ai punti di $E_{\varepsilon,n}$ $(n > n_1)$ corrispondono, sulla C_n, dei punti che, proiettati ortogonalmente sul segmento (a, b), dànno un insieme $I_{\varepsilon,n}$ di misura $> (b - a) - 4\varepsilon$; e su tale insieme la derivata $u_n^1(x)$ esiste finita. Indicato con $(I_\varepsilon, I_{\varepsilon,n})$ l'insieme dei punti comuni a I_ε e $I_{\varepsilon,n}$, insieme di misura $> (b - a) - 5\varepsilon$, sia $\overline{x}$ un suo punto qualunque. Al punto $P_n^{(n)}$ di C_n, di coordinate $\overline{x}$ e $u_n(\overline{x})$, corrisponde, secondo la rappresentazione (1), il punto $P^{(n)} \equiv (x^{(n)}, u(x^{(n)}))$ di C. E poichè la distanza fra $P_n^{(n)}$ e $P^{(n)}$ è $< \delta$, si ha $|\overline{x} - x^{(n)}| < \delta$ e quindi $|u'(\overline{x}) - u'(x^{(n)})| < \sigma$. Essendo poi $|u'_n(\overline{x}) - u'(x^{(n)})| < \sigma$, risulta $|u'(\overline{x}) - u'_n(\overline{x})| < 2\sigma$, e questa disuguaglianza è verificata su tutto $(I_\varepsilon, I_{\varepsilon,n})$, di misura $(b - a) - 5\varepsilon$, e per ogni $n > n_1$. Essendo ε arbitrario, indicato con I_n l'insieme di tutti i punti di (a, b) ove essa è verificata per un determinato n, si ha $m(I_n) \longrightarrow (b - a)$ per $n \longrightarrow \infty$. Ciò prova che $u'_n(x)$ converge in misura verso $u'(x)$, su tutto (a, b).

2. Alle ipotesi del teorema del numero precedente aggiungiamo l'assoluta continuità della $u(x)$ e dimostriamo che, se E è un insieme misurabile di (a, b), l'integrale $\int_E |u'_n(x)|\, dx$ tende a zero con la misura di E, e ciò indipendentemente dall'indice n. In modo più preciso, dimostriamo che, *preso un numero positivo ε qualsiasi, è poi sempre possibile di determinarne un altro δ, tale che sia*

$$\int_E |u'_n(x)|\, dx < \varepsilon,$$

per ogni insieme misurabile E, *di* (a, b), *di misura* $< \delta$ *e per ogni* n *da* 0 *all'* ∞.

Cominciamo con l'osservare che, avendosi $|u'_n| < \sqrt{1 + u'^2_n}$, è

$$\int_E |u'_n|\, dx < \int_E \sqrt{1 + u'^2_n}\, dx .$$

Fissato un numero positivo η, determiniamo $\delta_1 > 0$ in modo che, per ogni insieme misurabile E tale che sia $m(E) < \delta_1$, si abbia

$$\int_E \sqrt{1 + u'^2}\, dx < \eta ; \tag{2}$$

questa determinazione è possibile in base ad una proprietà fondamentale degli integrali. Siccome $u'_n(x)$ tende in misura a $u'(x)$, anche $\sqrt{1 + u'^2_n}$ tende in misura a $\sqrt{1 + u'^2}$ (¹); e indicando con I_n l'insieme dei punti di (a, b) su cui non è $|\sqrt{1 + u'^2_n} - \sqrt{1 + u'^2}| \leq \eta$, si ha, per ogni $n >$ di un certo $\bar{n}$, $m(I_n) < \delta_1$.

Se E è un qualunque insieme misurabile di (a, b), è perciò

$$\int_E \sqrt{1 + u'^2_n}\, dx = \int_E \sqrt{1 + u'^2}\, dx + \theta\eta\, m(E) + \theta_1 \eta + \int_{E_n} \sqrt{1 + u'^2_n}\, dx ,$$

dove è $|\theta| < 1$, $|\theta_1| < 1$, e E_n indica l'insieme comune a E e I_n. Se l'η lo prendiamo $< \dfrac{\varepsilon}{4(b - a + 1)}$, abbiamo, per ogni $n > \bar{n}$, e per qualsiasi insieme misurabile E,

$$\int_E \sqrt{1 + u'^2_n}\, dx > \int_E \sqrt{1 + u'^2}\, dx - \frac{\varepsilon}{4} . \tag{3}$$

Fissiamo il numero $\bar{n}$ in modo che sia anche, per ogni $n > \bar{n}$, $L_n < L_0 + \dfrac{\varepsilon}{4}$. Avendosi, per l'assoluta continuità della $u(x)$,

$$L_0 = \int_a^b \sqrt{1 + u'^2}\, dx \ (^2), \quad \text{mentre invece è} \quad \int_a^b \sqrt{1 + u'^2_n}\, dx \leq L_n ,$$

(¹) È infatti $|\sqrt{1 + u'^2_n} - \sqrt{1 + u'^2}| < |u'_n - u'|$.

(²) L. Tonelli, *Sulla rettificazione delle curve* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLVII, 1908); vedi anche *Sulla lunghezza di una curva* (ibid., vol. XLVIII, 1912).

si può allora scrivere, se con C(E) indichiamo il complementare di E,

$$\int_E \sqrt{1+u_n'^2}\,dx + \int_{C(E)} \sqrt{1+u_n'^2}\,dx \leq L_n < L_0 + \frac{\varepsilon}{4} =$$
$$= \int_E \sqrt{1+u'^2}\,dx + \int_{C(E)} \sqrt{1+u'^2}\,dx + \frac{\varepsilon}{4},$$

ed anche, applicando la (3) a C(E),

$$\int_E \sqrt{1+u_n'^2}\,dx - \frac{\varepsilon}{4} < \int_E \sqrt{1+u'^2}\,dx + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da questa e dalla disuguaglianza (3) scende

$$\left| \int_E \sqrt{1+u_n'^2}\,dx - \int_E \sqrt{1+u'^2}\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4}$$

per tutti gli insiemi misurabili E e per tutti gli $n > \bar{n}$. Tenendo conto di (2), si ha dunque, se è $m(E) < \delta_1$, e per ogni $n > \bar{n}$,

$$\int_E \sqrt{1+u_n'^2}\,dx < \varepsilon \quad , \quad \int_E |u_n'|\,dx < \varepsilon .$$

Se ora si prende $\delta < \delta_1$ e in modo che l'ultima disuguaglianza sia soddisfatta anche per i valori di n da 1 a $\bar{n}$, la proposizione proposta risulta dimostrata.

3. Quanto abbiamo or ora stabilito si può esprimere dicendo che gli integrali delle $u_1'(x), u_2'(x), \ldots, u_n'(x), \ldots$ sono in (a, b) *equiassolutamente continui*; e per un teorema di G. Vitali [1] si può concludere che *nella ipotesi dell'enunciato del n. I, e supponendo la funzione* $u(x)$ *assolutamente continua, si ha, per ogni insieme misurabile* E *di* (a, b) *e per* $n \longrightarrow \infty$,

$$\int_E u_n'\,dx \longrightarrow \int_E u'\,dx \quad , \quad \int_E |u_n'|\,dx \longrightarrow \int_E |u'|\,dx$$

ed anche [*come lo dimostra la disuguaglianza* (4)]

$$\int_E \sqrt{1+u_n'^2}\,dx \longrightarrow \int_E \sqrt{1+u'^2}\,dx .$$

4. Sia $f(x, y, y')$ una funzione delle tre variabrli x, y, y', definita e continua in ogni punto del campo

$$[a \leq x \leq b \ , \ m \leq y \leq M \ , \ -\infty < y' < +\infty];$$

[1] G. Vitali, *Sull'integrazione per serie* (Rendic. del Circolo matem. di Palermo, tomo XXIII, 1907).

inoltre, sia tale che, fissato un numero $l > 0$, si abbia, in tutti i punti del nuovo campo $[a \leq x \leq b\ ,\ m \leq y \leq M\ ,\ |y'| \geq l]$, $|f(x, y, y')| < L|y'|$, dove L indica un numero positivo, invariabile. Abbiamo la proposizione:

« *Se la successione di funzioni* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, *date su* (a, b) *e sempre comprese fra* m *e* M, *converge quasi dappertutto verso la funzione assolutamente continua* $u(x)$, *in modo che la lunghezza, supposta finita, della curva* $y = u_n(x)$ *tenda a quella, pure finita, della* $y = u(x)$, *allora, qualunque sia l'* x *di* (a, b), *è, per* $n \longrightarrow \infty$,

$$\int_a^x f(x, u_n(x)\ ,\ u_n'(x))\, dx \longrightarrow \int_a^x f(x, u(x)\ ,\ u'(x))\, dx,$$

ponendosi $f(x, u_n, u_n') = 0$ *là dove la* u_n' *non esiste finita, e parimenti per la* $f(x, u, u')$; *e la convergenza è uniforme in tutto* (a, b) ».

Indichiamo con $E^{(r)}$ l'insieme dei punti di (a, b) nei quali la $u'(x)$ esiste ed è, in modulo, non superiore al numero intero positivo r. Prendiamo $r > l$. In $E^{(r)}$ la $f(x, u(x), u'(x))$ risulta limitata ed esiste l'integrale $\int_{E^{(r)}} f(x, u(x), u'(x))\, dx$; nel complementare $C(E^{(r)})$, per le ipotesi fatte, è $|f(x, u(x), u'(x))| < L|u'(x)|$, e dalla integrabilità della $|u'(x)|$ scende quella della $f(x, u, u')$ in $C(E^{(r)})$. Questa funzione è così integrabile su tutto (a, b). Altrettanto si dica per la $f(x, u_n(x), u_n'(x))$.

Siccome, per $r \longrightarrow \infty$, è $m(E^{(r)}) \longrightarrow b - a$, possiamo scegliere un r_1 in modo che sia $m(E^{(r_1)}) > (b - a) - \frac{\delta}{2}$, essendo il δ quello stesso della proposizione del n. 2. Poi, per la convergenza in misura della u_n' alla u', fissato ad arbitrio un $\eta > 0$, possiamo determinare un intero n_1 tale che, per ogni $n > n_1$, l'insieme $E_n^{(r_1)}$ dei punti di $E^{(r_1)}$ nei quali la $u_n'(x)$ esiste finita e soddisfa alla $|u_n'(x) - u'(x)| \leq \eta$, abbia una misura $> m(E^{(r_1)} - \frac{\delta}{2}$. Con ciò il complementare $C(E_n^{(r_1)})$ di $E_n^{(r_1)}$ ha una misura $< \delta$, ed abbiamo (n. 2)

$$\left| \int_a^b f(x, u_n, u_n')\, dx - \int_a^b f(x, u, u')\, dx \right| <$$

$$< \int_{E_n^{(r_1)}} |f(x, u_n, u_n') - f(x, u, u')|\, dx + L \int_{C(E_n^{(r_1)})} |u_n'|\, dx + L \int_{C(E_n^{(r_1)})} |u'| dx <$$

$$< \int_{E_n^{(r_1)}} |f(x, u_n, u_n') - f(x, u, u')|\, dx + 2\, L\, \varepsilon\, .$$

Siccome la $f(x, y, y')$ è uniformemente continua nel campo limitato $[a \leq x \leq b\ ,\ m \leq y \leq M\ ,\ |y'| \leq 2r_1]$, possiamo determinare l'η in

modo che sia sempre $|f(x, y, y') - f(x, \bar{y}, \bar{y}')| < \varepsilon$ tutte le volte che è $|y - \bar{y}| \leq \eta$, $|y' - \bar{y}'| \leq \eta$. Per la convergenza uniforme della $u_n(x)$ verso la $u(x)$, la quale risulta facilmente dalle condizioni poste e da quanto si è detto al principio del n. 1, possiamo allora trovare un $n_2 > n_1$, tale che, per ogni $n > n_2$, sia, su $E_n^{(\eta_1)}$, $|f(x, u_n(x), u_n'(x)) - f(x, u(x), u'(x))| < \varepsilon$. Dopo ciò abbiamo, per ogni $n > n_2$,

$$\left| \int_a^b f(x, u_n, u_n') - \int_b^b f(x, u, u')\, dx \right| < \varepsilon(b - a) + 2\,\mathrm{L}\,\varepsilon,$$

e la medesima disuguaglianza vale anche se, al posto di b, negli estremi superiori degli integrali, poniamo una x qualunque di (a, b). Essendo ε arbitrario, la nostra proposizione è stabilita.

Osservazione. — La proposizione ora dimostrata contiene come caso particolare quella del n. 6 della mia Nota *Sugli integrali curvilinei del calcolo delle variazioni* (Nota II) [1] nella quale avevo supposto che tutte le $u_n(x)$, come la $u(x)$, fossero *assolutamente continue* e convergessero uniformemente alla $u(x)$ in modo che le loro lunghezze tendessero a quella finita della $y = u(x)$; inoltre, avevo supposto la $f(x, y, y')$ tale che la funzione $x' f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) = F(x, y, x', y')$ soddisfacesse alle condizioni solite del calcolo delle variazioni e quindi fosse continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi tre ordini, nel campo dei valori ammessi per x e y e per tutte le coppie x', y' verificanti l'equazione $x'^2 + y'^2 = 1$. Un esempio semplicissimo, nel quale queste condizioni non sono verificate mentre lo sono quelle del teorema sopra dimostrato, è offerto dalla funzione $f(x, y, y') = y' \sin y'$. Questo esempio mostra anche come non si possa riguardare la proposizione qui stabilita come un semplice corollario di quella del n. 6 della Nota I.

5. Ritornando al teorema del n. 8 della Nota I, vale a dire al teorema di G. Fubini, vogliamo ora dedurlo dalla proposizione sull'integrazione per serie di B. Levi [2], ma in una maniera assai diversa da quanto ha già fatto il Fubini stesso.

Sia dunque $u(x) = \sum_1^\infty u_n(x)$ una serie, convergente su tutto (a, b), di funzioni non decrescenti. Indicato con E l'insieme di misura nulla nei cui punti manca o non è finita almeno una delle derivate u', u_n' $(n = 1, 2, \ldots)$, rinchiudiamolo [nel senso stretto: eccezion fatta, al più, per a e b [3]] in

[1] Questi Rendiconti, 1912, 1° sem.

[2] B. Levi, *Sopra l'integrazione delle serie* (Rendiconti del R. Istituto lombardo, vol. XXXIX, 1906).

[3] Intendiamo, con ciò, che ogni punto di E, distinto da a e b, o è *interno* ad un segmento di Δ, oppure è l'estremo comune di due segmenti contigui di Δ.

un sistema d'intervalli Δ, non sovrapponentisi, e tale che sia $\Sigma\Delta < \varepsilon$, e definiamo, per ogni n da 0 all'∞ (essendo $u_0 \equiv u$), la funzione f_n nel seguente modo: fuori degli intervalli Δ e nelle loro estremità poniamo $f_n = u_n$; nell'interno di un $\Delta \equiv (\alpha, \beta)$ facciamo variare la f_n linearmente, poniamo cioè $f_n(x) = f_n(\alpha) + \frac{f_n(\beta) - f_n(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$. La $f_n(x)$ risulta continua e non decrescente, ed ha in ogni punto la derivata destra, $D^+ f_n$, finita, coincidente, fuori dei Δ, con u'_n. È evidente l'esistenza della $D^+ f_n$ finita in ogni punto interno ad un Δ o coincidente col primo estremo di uno di questi intervalli. Se x non è un tal punto ma, per $h > 0$ e conveniente, non esiste nessun Δ nell'intervallo $(x, x + h)$, l'esistenza della $D^+ f_n$ e l'uguaglianza $D^+ f_n = u'_n$ sono pure evidenti. Supponiamo, infine, che x non sia interno a nessun Δ nè coincidente col primo estremo di qualche Δ, e che esistano alla sua destra infiniti di questi intervalli, prossimi ad esso quanto si vuole. Il rapporto incrementale $\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$, per $h > 0$, è $= \frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h}$, se $x + h$ non è interno a nessun Δ; e nel caso opposto è compreso fra $\frac{u_n(\alpha) - u_n(x)}{\alpha - x}$ e $\frac{u_n(\beta) - u_n(x)}{\beta - x}$, essendo (α, β) il Δ in cui cade $x + h$. Si ha dunque $\lim\limits_{h \to +0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = u'(x)$. Da quanto si è già detto risulta poi sempre $D^+ f_n \geq 0$. La serie $\Sigma f_n(x)$, nei punti *non interni* ai Δ coincide con $\Sigma u_n(x)$ e quindi converge verso $f(x)$. Ed essendo, in $\Delta \equiv (\alpha, \beta)$,

$$\sum_1^r f_n(x) = \sum_1^r f_n(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\left\{\sum_1^r f_n(\beta) - \sum_1^r f_n(\alpha)\right\},$$

la $\Sigma f_n(x)$ converge dappertutto verso la $f(x)$. Per essere la $D^\times f_n$ sempre finita e la f_n a variazione limitata, è poi $\int_a^x D^+ f_n \, dx = f_n(x) - f_n(a)$, onde

$$\sum \int_a^x D^+ f_n \, dx = f(x) - f(a) = \int_a^x D^+ f \, dx.$$

Per il teorema sull'integrazione per serie del Levi, la $\Sigma D^+ f_n$ è allora convergente quasi dappertutto ed è

$$\sum \int_a^x D^+ f_n \, dx = \int_a^x (\Sigma D^+ f_n) \, dx,$$

onde

$$\int_a^x (\Sigma D^+ f_n) \, dx = \int_a^x D^+ f \, dx;$$

e derivando, $\Sigma D^+ f_n = D^+ f$ quasi dappertutto, ossia quasi dappertutto fuori dei Δ, $\Sigma u'_n = u'$. E il teorema è dimostrato, perchè è $\Sigma\Delta < \varepsilon$, con ε arbitrario.