ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Approssimazioni numeriche.* Nota del Corrispondente G. PEANO.

Le quantità, o numeri reali, su cui si opera in pratica, sono in generale date solo per approssimazione. Quindi è necessario, conoscendo il grado di approssimazione nei dati, di saper determinare l'approssimazione che risulta in un calcolo su quei dati.

Il calcolo differenziale fornisce una regola semplice per risolvere il problema, colle formule del differenziale totale, del tipo

$$\mathrm{d} f(x, y) = \mathrm{D}_1 f(x, y)\, \mathrm{d}x + \mathrm{D}_2 f(x, y)\, \mathrm{d}y ,$$

ove $f(x, y)$ è una funzione delle due variabili x e y, $\mathrm{D}_1 f$ e $\mathrm{D}_2 f$ sono le sue derivate parziali, $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ sono le differenze fra i valori veri ed i valori approssimati di x e y, e $\mathrm{d}f(x, y)$ è la differenza corrispondente fra i valori della funzione.

Questa regola del differenziale totale fu usata in tutti i tempi, e lo è sempre nelle matematiche applicate, per risolvere il problema delle approssimazioni. Però, se per x e y in $\mathrm{D}_1 f(x, y)$ e $\mathrm{D}_2 f(x, x)$ si intendono i valori veri, o i valori dati per approssimazione, di quelle due quantità, la formula non è esatta, ma deve essere completata con infinitesimi d'ordine superiore. Essa si usa però nelle applicazioni pratiche, poichè, come dice il Serret, « l'inexactitude ne peut avoir aucune influence dans les applications que l'on en fait ».

Guyou, nei « Nouvelles Annales de mathématiques » 1889, attribuì nella formula considerata, ad x e y, dei valori medii fra i veri e gli approssimati, e la formula diventa esatta. La formula, così intesa, non è altro che il teorema del valore medio, fondamento del calcolo differenziale, stato enunciato da Cavalieri nel 1635, per le funzioni d'una variabile.

Questa applicazione trovasi pure nelle mie *Lezioni di analisi infinitesimale*, Torino 1893, tomo 2°, pp. 146-149. Non veggo però negli altri trattati di Analisi alcun cenno di questa semplice ed elegante applicazione delle regole di derivazione alla teoria delle approssimazioni, di tanta importanza pratica.

Nella presente Nota espongo le regole per le approssimazioni numeriche, sotto forma elementare, senza presupporre il calcolo differenziale; dò a queste regole la forma di regole di derivazione, il che facilita la memoria.

Notazioni.

Dare un numero per approssimazione significa dare un intervallo cui quel numero appartiene. Se a e b sono i valori approssimati, per difetto e per eccesso, di una quantità, questa apparterrà all'intervallo da a a b. Questo intervallo si suol indicare con $a\!-\!b$, $a\!\vdash\!\!\dashv\!b$, $a\!\vdash\!b$, $a\!\dashv\!b$, secondochè sono esclusi gli estremi, o sono compresi, o uno è compreso e l'altro è escluso.

Preferisco la notazione inglese 1·23 e ·45 alla 1,23 e 0,45 delle frazioni decimali; poichè la virgola ha troppi significati.

Colla notazione 1·234..., e simili, si suole intendere ogni numero le cui prime cifre sono quelle scritte, cioè

$$1{\cdot}234\ldots = 1{\cdot}234 \vdash 1{\cdot}235\,;$$

« la scrittura 1·234... rappresenta l'intervallo compreso fra 1·234 e 1·235 (il primo incluso, ed il secondo escluso) ».

Si avrà:

$$1{\cdot}234 \;\varepsilon\; 1{\cdot}234\ldots,$$

cioè « 1·234 è un numero della classe 1·234... ».

$$1{\cdot}234\ldots \supset 1{\cdot}23\ldots\,;$$

« il primo intervallo è contenuto nel secondo ».

In questo mio scritto, io distinguerò il segno ε di proposizione singolare, e il segno $\supset$ di proposizione universale, dal segno $=$. Molti autori li confondono col segno $=$. Non intendo qui di esaminare se ciò sia comodo o no; non introducendo i segni ε e $\supset$, bisognerà sempre far notare che dalle scritture

$$1{\cdot}234 = 1{\cdot}234\ldots\quad,\quad 1{\cdot}2345 = 1{\cdot}234\ldots,$$

ove il segno $=$ ha il valore di ε, e dalle scritture

$$1{\cdot}234\ldots \supset 1{\cdot}23\ldots\quad,\quad 1{\cdot}235\ldots \supset 1{\cdot}23\ldots,$$

ove $=$ significa $\supset$, non si può dedurre l'eguaglianza dei primi membri.

Regole.

Siano x, y, ... delle coppie di quantità. Dicendo che x è una coppia di quantità, intendiamo che x_1 e x_2 sono delle quantità. Porremo:

$$\mathrm{d}x = x_2 - x_1\,;$$

dx si può leggere « incremento di x », o « differenza di x », o anche

« differenziale di x ». Essendo $f(x, y)$ una espressione analitica delle coppie x e y, porremo

$$\mathrm{d}f(x, y) = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1).$$

Il simbolo d ebbe questo valore, e l'ha ancora in libri di matematica applicata. Nei trattati di analisi fu sostituito, in questo senso, con Δ.

Si ha:

$$\mathrm{d}(x + y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y. \tag{I}$$

Infatti

$$\mathrm{d}(x + y) = (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y.$$

Se x_1, x_2 e y_1, y_2 sono i valori, per difetto e per eccesso, delle quantità approssimate x e y, saranno $x_1 + y_1$ e $x_2 + y_2$ i valori approssimati, per difetto e per eccesso, della somma; e $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}(x + y)$ sono gli errori negli addendi e nella somma. Quindi la formula (I) si può leggere « l'errore della somma è eguale alla somma degli errori degli addendi ».

Esempio:

$$\mathrm{d}(1{\cdot}23\ldots + 4{\cdot}56\ldots) = \mathrm{d}\,1{\cdot}23\ldots + \mathrm{d}\,4{\cdot}56\ldots = {\cdot}01 + {\cdot}01 = {\cdot}02:$$

cioè, se gli addendi sono noti a meno di 1 centesimo, la somma sarà nota a meno di 2 centesimi.

Se un addendo è esatto, il suo errore sarà nullo. Per esempio,

$$\mathrm{d}(\pi + 6{\cdot}85\ldots) = \mathrm{d}\,6{\cdot}85\ldots = {\cdot}01,$$

supposto π un numero esatto. Se $\pi = 3{\cdot}14$, cioè è un numero esatto di centesimi, sarà $\pi + 6{\cdot}85\ldots = 9{\cdot}99\ldots$, e la somma sarà nota con 2 cifre decimali esatte. Ma se π ha 4 cifre decimali, per esempio $\pi = 3{\cdot}1415$, la somma sarà per difetto 9·9915, e per eccesso 10·0015. Quindi, quantunque l'errore della somma sia di un centesimo, noi possiamo assicurare nessuna cifra di questa somma. Pertanto non esiste soluzione del problema « determinare il numero delle cifre decimali esatte con cui si debbono dare i termini d'una somma, affinchè questa risulti nota con n cifre decimali esatte ». La pratica si contenta di regole come le seguenti:

« Date due quantità note con n cifre decimali, si sommino i valori per difetto; tutte le cifre sono cifre esatte della somma, salvo l'ultima cifra che forse si deve aumentare di una unità ».

Questa regola non varia, anche se un addendo è esatto, purchè abbia più di n cifre decimali. Se l'ultima cifra è 9, aumentandola di un'unità varia la precedente.

« Date più quantità, in numero non superiore a 11, note con n cifre decimali, si sommino i valori per difetto, e si sopprima l'ultima cifra. Tutte le $n - 1$ cifre rimaste sono le cifre esatte della somma, salvo l'ultima, che forse si deve aumentare di una unità ».

Essendo a una quantità qualunque, ed n un numero intero (positivo di regola), pongasi:

$$\mathrm{V}_n a = (\mathrm{E}\, 10^n a)/10^n ,$$

cioè $\mathrm{V}_n a$, che si legge « valore con n decimali di a », indica ciò che si ottiene moltiplicando a per 10^n, prendendo la parte intera del prodotto, e dividendola per 10^n.

Allora, se m è un intero non superiore ad 11, e se $a_1\, a_2 \ldots a_m$ sono quantità qualunque, la regola precedente si può scrivere:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m \,\varepsilon\, \mathrm{V}_{n-1}(\mathrm{V}_n a_1 + \mathrm{V}_n a_2 + \cdots + \mathrm{V}_n a_m) + (0 {}^{\vdash} 2)/10^{n-1} .$$

Questa regola è data, nei trattati, per 9 o 10 termini. Il prof. M. Bottasso, in una conferenza tenuta lo scorso anno 1915 alla R. Università di Torino, osservò che sussiste pure per 11 termini.

(II) $$\mathrm{d}(x - y) = \mathrm{d}x - \mathrm{d}y .$$

Dimostrazione analoga alla (I). Se $x_1 x_2 y_1 y_2$ sono i valori per difetto e per eccesso di x e y, i valori per difetto e eccesso della somma sono $x_1 - y_2$ e $x_2 - y_1$, cioè

$$x_1 {}^{\vdash} x_2 - y_1 {}^{\vdash} y_2 = (x_1 - y_2)^{-}(x_2 - y_1) .$$

(III) $$\mathrm{d}(x \times y) = x \times \mathrm{d}y + y \times \mathrm{d}x ,$$

ove x e y rappresentano valori medii fra x_1 e x_2, y_1 e y_2.

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x \times y) &= x_2 y_2 - x_1 y_1 = x_2 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_1 - x_1 y_1 = \\ &= x_2(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) = x_2\, \mathrm{d}y + y_1\, \mathrm{d}x , \end{aligned}$$

che è appunto la formula richiesta, ove la parola *medio* non escluda l'estremo, cioè si parli degli intervalli $x_1 {}^{\vert\!-\!\vert} x_2$, $y_1 {}^{\vert\!-\!\vert} y_2$, estremi inclusi.

Oppure, continuando la serie delle nostre eguaglianze, detta z una quantità compresa fra 0 e 1, estremi esclusi, si avrà

$$\mathrm{d}(x \times y) = (x_2 - z\, \mathrm{d}x)\, \mathrm{d}y + (y_1 + z\, \mathrm{d}y)\, \mathrm{d}x ;$$

e dette x e y le quantità $x_2 - z\,\mathrm{d}x$ e $y_1 + z\,\mathrm{d}y$, che sono comprese fra x_1 e x_2, y_1 e y_2, estremi esclusi, si ha la formula da dimostrarsi.

La formula (III) si può enunciare:

« L'errore del prodotto di due fattori è eguale al primo fattore moltiplicato per l'errore del secondo, più il secondo fattore per l'errore del primo ». Per questi fattori si debbono prendere valori compresi fra i valori per difetto e quelli per eccesso. Si può anche prendere un fattore per difetto e l'altro per eccesso.

Nella formula (III) si suppone

$$x \,\varepsilon\, x_1 - x_2 \quad , \quad y \,\varepsilon\, y_1 - y_2 \,,$$

cioè che x e y sono convenienti valori compresi in quegli intervalli. Se invece suppongo

$$x = x_1 - x_2 \quad , \quad y = y_1 - y_2 \,,$$

cioè che x e y rappresentino tutti i valori in quegli intervalli, la formula diventa

(III') $$\mathrm{d}(x \times y) \,\varepsilon\, x \times \mathrm{d}y + y \times \mathrm{d}x \,.$$

Esempio:

$$\mathrm{d}(6{\cdot}78 \ldots \times 7{\cdot}89 \ldots) \,\varepsilon\, 6{\cdot}78 \ldots \times \mathrm{d}\, 7{\cdot}89 \ldots + 7{\cdot}89 \ldots \times \mathrm{d}\, 6{\cdot}78 \ldots =$$
$$= 6{\cdot}78 \ldots \times {\cdot}01 + 7{\cdot}89 \ldots \times {\cdot}01 = (6{\cdot}78 \ldots + 7{\cdot}89 \ldots) \times {\cdot}01 =$$
$$= (14{\cdot}67 - 14{\cdot}69) \times {\cdot}01 = {\cdot}1467 - {\cdot}1469 \,.$$

Prendendo un fattore per difetto e l'altro per eccesso, si ha errore $= {\cdot}1468$.

In pratica basta dire che l'errore in questo esempio, è $> 1/10$, ed è < 1.

Negli appositi trattati trovansi regole per stimare l'ordine decimale del prodotto di due numeri approssimati, e il modo di eseguire rapidamente la moltiplicazione, tralasciando i prodotti parziali inutili. Il prof. A. Tanturri espose con spirito critico questi studii negli Atti della R. Accademia di Torino, 1915, 25 aprile, *Prodotto di due numeri approssimati.*

La regola (III) permette di riconoscere subito la bontà d'ogni regola pratica.

(IV) $$\mathrm{d}(1/x) = -(\mathrm{d}x)/x^2 \,,$$

ove x è un valore medio fra i valori positivi x_1 e x_2.

Infatti,

$$\mathrm{d}(1/x) = 1/x_2 - 1/x_1 = -(x_2 - x_1)/(x_1 x_2) = -\mathrm{d}x/(x_1 x_2) = -\mathrm{d}x/x^2 \,,$$

chiamando x il valore $\sqrt{(x_1 x_2)}$ che è medio fra x_1 e x_2.

(V) $$\mathrm{d}(x^m) = m x^{m-1}\, \mathrm{d}x \,,$$

ove m è un numero intero e positivo, ed x un valore medio fra i considerati.

Infatti, essendo la regola vera per $m = 1$, suppostala vera per un valore di m, si avrà:

$$\mathrm{d}(x^{m+1}) = \mathrm{d}(x^m \times x) \,\varepsilon\, x^m \times \mathrm{d}x + x \times m x^{m-1}\, \mathrm{d}x = (m+1)\, x^m\, \mathrm{d}x \,,$$

cioè la formula resulta vera per $m+1$. In questo calcolo, $x = x_1 - x_2$ rappresenta ogni valore fra x_1 e x_2; e si sommano degli intervalli. Si sostituisce poi ad ε il segno $=$, supponendo che x sia un conveniente valore dell'intervallo $x_1 - x_2$.

$$\text{(VI)} \qquad d\sqrt{x} = dx/(2\sqrt{x}),$$

cioè « l'errore della radice quadrata d'una quantità positiva è eguale all'errore del radicando diviso per 2 volte la radice di un valore medio fra vero ed approssimato.

Infatti, $(\sqrt{x^2}) = x$, e differenziando, $(2\sqrt{x})\, d\sqrt{x} = dx$; onde la formula VI.

Esempio: Se $\pi = 3{\cdot}1415\ldots$, sarà

$$d\sqrt{\pi} = d\pi/(2\sqrt{\pi})\ ;$$

e siccome $d\pi = {\cdot}0001$, e $2\sqrt{\pi} > 1$, sarà $d\sqrt{\pi} < d\pi$: cioè, se π è noto con 4 cifre decimali, anche $\sqrt{\pi}$ sarà noto con altrettante cifre.

$$\text{(VII)} \qquad d\,\mathrm{Log}\, x = \mathrm{Log}\, e \times dx/x,$$

essendo x un valore medio fra le quantità positive x_1 e x_2, ed indicando Log i logaritmi in base, qualunque, p. es. 10.

Per dimostrare elementarmente questa formula, si deve premettere la definizione del numero « e », e questa si deve dare senza il concetto di limite di funzione (con cui si definisce la derivata), ma col solo concetto di limite superiore o inferiore d'una classe (che figura nella definizione del numero reale).

Perciò richiamo l'ineguaglianza

$$\text{(1)} \qquad x^m y^n < [(mx + ny)/(m+n)]^{m+n},$$

ove x e y sono quantità positive, non eguali; e m ed n sono numeri positivi, interi, o fratti, o reali. Essa significa che la media geometrica fra due quantità è minore della loro media aritmetica; e se ne conoscono numerose dimostrazioni elementari.

Pongo, nella (1), $1 + \dfrac{1}{m}$ al posto di x, e $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ al posto di y^n; avrò

$$\text{(2)} \qquad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 1,$$

essendo m ed n due quantità positive qualunque. Moltiplico pel reciproco del secondo fattore, ed ho

$$(3) \qquad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Perciò esisteranno il limite superiore finito dei valori di $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, ed il limite inferiore dei valori di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$; e siccome, per $m=n$, il rapporto delle due quantità (3) è $1+1/n$, il cui limite inferiore è 0, segue che il limite superiore dei valori del primo membro della (3) è eguale al limite inferiore dei valori del secondo membro della (3); detto « e » questo limite comune, si avrà, per ogni valore positivo di m,

$$(1+1/m)^m < \mathrm{e} < (1+1/m)^{m+1}.$$

Siano ora x_1 e x_2 due quantità positive. Posto $m = x_1/(x_2 - x_1)$, e presi i logaritmi, sarà

$$\frac{x_1}{x_2-x_1}\operatorname{Log}\frac{x_2}{x_1} < \operatorname{Log}\mathrm{e} < \frac{x_2}{x_2-x_1}\operatorname{Log}\frac{x_2}{x_1},$$

da cui

$$\operatorname{Log}\frac{x_2}{x_1} < \frac{x_2-x_1}{x_1}\operatorname{Log}\mathrm{e} \quad , \quad > \frac{x_2-x_1}{x_2}\operatorname{Log}\mathrm{e};$$

e, chiamando x un valore medio fra x_1 e x_2,

$$\operatorname{Log}\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2-x_1}{x}\operatorname{Log}\mathrm{e}.$$

Ma il primo membro vale $\operatorname{Log} x_2 - \operatorname{Log} x_1 = \mathrm{d}\operatorname{Log} x$; e $x_2 - x_1 = \mathrm{d}x$: onde la formula VII.

Le formule (V)-(VII) sono susseguite dalla frase « ove x è un valore medio ». Si può far dire ciò dalla formula stessa, modificando le notazioni.

Sia x un intervallo (estremi inclusi, per esempio). Pongo per definizione:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{l}'x - \mathrm{l}_1 x,$$

cioè chiamo $\mathrm{d}x$ l'ampiezza dell'intervallo, differenza fra i suoi limiti superiore ed inferiore. Allora, se f è una funzione definita nell'intervallo x, fx è l'insieme dei suoi valori; se f è reale e continua, fx è un intervallo, e $\mathrm{d}fx$ ne è l'ampiezza. Si avrà allora:

$$(\mathrm{V}') \qquad \mathrm{d}(x^m) \,\varepsilon\, m\,x^{m-1}\,\mathrm{d}x$$

$$(\mathrm{VI}') \qquad \mathrm{d}\sqrt{x} \,\varepsilon\, \mathrm{d}x/(2\sqrt{x})$$

$$(\mathrm{VII}') \qquad \mathrm{d}\operatorname{Log} x \,\varepsilon\, \operatorname{Log}\mathrm{e} \times \mathrm{d}x/x.$$

I d sono tutti, con questa convenzione, quantità positive, perciò

$$\mathrm{d}(1/x) = (\mathrm{d}x)/x^2$$

perdendo il segno.