

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTI. PIO BEFANI

1916

Fisica matematica. — *Sulla variazione di resistenza elettrica di un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico.*
Nota I della dott. ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA (1).

1. Le ricerche sperimentali sulla variazione di resistenza elettrica determinata da un campo magnetico in una sostanza conduttrice sottoposta alla sua azione, sono numerosissime, forse anche troppe (2). Non poche volte appaiono discordi i risultati di tali ricerche ed inconciliabili tra loro le formule empiriche proposte dai diversi sperimentatori per esprimere, in funzione dell'intensità H del campo, il rapporto $\frac{\Delta \rho}{\rho_0}$ della variazione di resistenza $\Delta \rho$ alla resistenza ρ_0 , corrispondente ad $H = 0$.

Come risulterà da quanto dirò nei seguenti paragrafi, tali discordanze dipendono in parte dal non aver ben precisato che cosa si debba intendere per variazione di resistenza prodotta dal campo.

Un risultato relativamente al quale le dette ricerche sperimentali si possono ritenere concordi, è il seguente: le sostanze ferro-magnetiche (ferro, nichel, cobalto) presentano un aumento di resistenza parallelamente alle linee di forza magnetiche, una diminuzione nelle direzioni perpendicolari; le sostanze diamagnetiche, tra le quali il bismuto occupa il primo posto, presentano un aumento di resistenza in tutte le direzioni (diverso nelle diverse direzioni); per le altre sostanze la variazione di resistenza è molto piccola.

Per spiegare questi risultati sperimentali, è stata affacciata l'ipotesi che il campo determini una vera e propria alterazione temporanea delle proprietà specifiche delle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione. Le ricerche teoriche che sono state fatte per dare una spiegazione dei detti risultati, prendendo come base non l'ipotesi sopra accennata, ma le leggi del movimento della elettricità in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico, sono poche, al contrario delle ricerche sperimentali.

Citerò brevemente i lavori che, in proposito, ho potuto trovare. Il meno recente è quello di Goldhammer (3); questi ha considerato una lamina rettangolare fornita lungo due lati opposti di due elettrodi di resistenza trascurabile e disposta trasversalmente in un campo magnetico uniforme; ha am-

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1916.

(2) Per notizie bibliografiche in proposito, cfr. Chwolson, *Traité de Physique*, tome IV, pag. 1018 (Paris, Librairie scientifique A. Hermann et fils, 1913).

(3) *Annalen der Physik* (31), 1887, pag. 370.

messo che le linee di flusso sotto l'azione del campo siano ancora rette perpendicolari agli elettrodi; ha trovato che la teoria non prevede la variazione di resistenza che si constata sperimentalmente ed ha introdotta allora l'ipotesi che il campo alteri le proprietà dei conduttori, determinando in essi una temporanea anisotropia. Come ha dimostrato il prof. Corbino (1), non è giusta l'ipotesi di Goldhammer, ammessa più tardi anche dal Drude, che per una lamina, nelle condizioni dette, le linee di flusso restino, sotto l'azione del campo, rettilinee e perpendicolari agli elettrodi.

Il Drude (2), poste le basi della teoria elettronica che da lui ha preso nome, ha esaminata, tra le altre questioni, anche la variazione di resistenza elettrica determinata dal campo. Anch'egli ha considerato una lamina rettangolare, fornita di elettrodi lungo due lati opposti e disposta trasversalmente nel campo. Secondo il Drude la causa del fenomeno in questione sarebbe la differenza di temperatura che si stabilisce tra i due orli liberi della lamina. In conseguenza di questa differenza di temperatura si produrrebbe un accumulato di ioni positivi lungo un elettrodo e di ioni negativi lungo l'altro elettrodo; da ciò prenderebbe origine un effetto longitudinale, interpretabile come una variazione di resistenza. Ma lo Zahn (3) ha trovato

che il rapporto $\frac{\Delta q}{e_0}$ varia pochissimo se una lamina di bismuto, nelle condizioni supposte dal Drude, si trova nell'aria (nel qual caso la differenza di temperatura tra i due orli non saldati agli elettrodi può stabilirsi liberamente) o se è immersa in acqua circolante (nel qual caso le differenze di temperatura, se non si eliminano del tutto, si attenuano però molto). La spiegazione del Drude non sembra perciò soddisfacente.

J. J. Thomson (4) ha cercato una spiegazione dell'aumento di resistenza di una lamina di sostanza diamagnetica disposta trasversalmente nel campo, basandosi sulla sua teoria elettronica, alquanto diversa da quella di Drude. Ha trovato che si può spiegare tale aumento, se si ammette che gli urti tra molecole e corpuscoli elettrizzati siano fortemente influenzati dalla carica posseduta da quest'ultimi. Basandosi sul calcolo fatto da Thomson, Adams (5) ha esaminato quali ipotesi si debbano fare sulla natura di un'eventuale alterazione delle proprietà dei conduttori determinata dal campo, se si vuole ammettere tale alterazione.

C'è infine una ricerca di Gans (6) il quale ha ammesso, con Lorentz,

(1) Rendic. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213.

(2) Annalen der Physik, III, 1900, pag. 377.

(3) Annalen der Physik, XXIII, 1907, pag. 142.

(4) *Rapports présentés au Congrès International de Physique*, III, pag. 138, 1900; Philosophical Magazine, 3, pag. 353, 1902.

(5) Physical Review, XXIV, 1907, pag. 428.

(6) Annalen der Physik, XX, 1906, pag. 293.

una sola specie di elettroni mobili, quelli negativi; l'autore stesso ha riconosciuto che le formule trovate per la dipendenza della variazione di resistenza dal campo non si accordano con le esperienze, almeno per campi di intensità arbitraria.

In questo lavoro mi propongo di esaminare che cosa preveda la teoria elettronica che fa capo a Drude nei riguardi dei risultati sperimentali che possono interpretarsi come una variazione di resistenza elettrica prodotta dal campo magnetico; se ci siano o no fenomeni che la teoria non prevede e per spiegare i quali sia necessario introdurre l'ipotesi di un'alterazione di proprietà specifiche prodotta dal campo nelle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione.

Mi limiterò a considerare il caso di un campo magnetico uniforme e di un conduttore omogeneo ed isotropo, tenuto a temperatura costante.

2. In un precedente lavoro ⁽¹⁾ ho stabilite le equazioni che individuano il movimento della elettricità in un conduttore a tre dimensioni non omogeneo, anisotropo, tenuto a temperatura costante e sottoposto all'azione di un campo magnetico non uniforme, ammettendo che quest'ultimo possa eventualmente alterare le proprietà specifiche del conduttore. Da tali equazioni si ricavano facilmente quelle valide nel caso di un campo magnetico uniforme e di un conduttore omogeneo ed isotropo, nell'ipotesi che le proprietà specifiche di quest'ultimo non si alterino per azione del campo.

Siano $x y z$ tre assi che formino un triedro ortogonale destrorso; sia l'asse z parallelo alle linee di forza del campo magnetico. Se si indicano con N_1 ed N_2 i numeri di ioni positivi e di ioni negativi per cm^3 della sostanza conduttrice, con v_1 e v_2 le mobilità degli ioni delle due specie, con e il valore assoluto della carica di uno ione (positivo o negativo), se si pone

$$m_1 = e v_1 H \quad , \quad m_2 = e v_2 H \quad , \quad K_1 = \frac{e^2 v_1 N_1}{1 + m_1^2} \quad , \quad K_2 = \frac{e^2 v_2 N_2}{1 + m_2^2}$$

$$K = K_1 + K_2 \quad , \quad \epsilon = m_1 K_1 - m_2 K_2 \quad , \quad \sigma = e^2 (v_1 N_1 + v_2 N_2) \quad ,$$

si ottengono le seguenti relazioni tra le componenti $\dot{\gamma}_x \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_z$ della densità di corrente e le derivate del potenziale elettrico V :

$$(1) \quad \dot{\gamma}_x = -K \frac{\partial V}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad \dot{\gamma}_y = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial x} - K \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad \dot{\gamma}_z = -\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \quad (*)$$

3. Consideriamo un punto P del conduttore; quando quest'ultimo non è sottoposto all'azione del campo magnetico sia l_0 la linea di flusso passante

(¹) Rendic. Accad. dei Lincei, 2° sem., pag. 28.

(*) Queste formule sono perfettamente analoghe a quelle stabilite dal prof. Corbino nel caso di una lamina disposta trasversalmente in un campo magnetico uniforme. Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213.

per P, γ_0 la densità di corrente, V_0 il potenziale in P, c_0 la conducibilità specifica della sostanza. Si avrà

$$\dot{\gamma}_0 = -c_0 \frac{\partial V_0}{\partial l_0}.$$

Sia l la linea di flusso passante per P, quando il conduttore è sottoposto all'azione dal campo magnetico; siano $\dot{\gamma}$ e V i valori della densità di corrente e del potenziale in P. Se la teoria prevede un'uguaglianza del tipo

$$\dot{\gamma} = -c \frac{\partial V}{\partial l}$$

con $c \geq c_0$, potremo dire che la teoria prevede un'apparente alterazione della conducibilità specifica o della resistenza specifica del conduttore.

Moltiplicando la prima delle (1) per $\cos lx$, la seconda per $\cos ly$, la terza per $\cos lz$ e sommandole membro a membro, si ottiene

$$(2) \quad \dot{\gamma} = -K \frac{\partial V}{\partial l} - \varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right) - (\sigma - K) \frac{\partial V}{\partial z} \cos lz.$$

Posto nelle (1), in luogo di $\dot{\gamma}_x \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_z$, $\dot{\gamma} \cos lx$ $\dot{\gamma} \cos ly$ $\dot{\gamma} \cos lz$, moltiplicando la prima delle (1) per $\cos ly$, la seconda per $\cos lx$, e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$(3) \quad 0 = -K \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right) + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial l} - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial z} \cos lz.$$

Moltiplicando la prima delle (1) per $\cos lx \cos lz$, la seconda per $\cos ly \cos lz$, la terza per $(\cos^2 lz - 1)$ e sommando membro a membro, si ha

$$(4) \quad 0 = -\varepsilon \cos lz \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right) - K \cos lz \frac{\partial V}{\partial l} + \\ + [K \cos^2 lz + \sigma(1 - \cos^2 lz)] \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Per mezzo delle (3) e (4) si possono esprimere $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos ly - \frac{\partial V}{\partial y} \cos lx \right)$ e $\frac{\partial V}{\partial z}$ in funzione di $\frac{\partial V}{\partial l}$. Sostituendo nella (2) si ottiene

$$(5) \quad \dot{\gamma} = - \left[\frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} + \left(\sigma - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz}{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz + K\sigma(1 - \cos^2 lz)} \right] \frac{\partial V}{\partial l} = -c \frac{\partial V}{\partial l}.$$

Per $\cos lz = 0$ (condizione che si ritiene per es. soddisfatta nel caso di lamine e fili sottili disposti trasversalmente nel campo) si ha

$$c = \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} \quad (1).$$

Si dimostra facilmente la diseuguaglianza

$$(6) \quad c_0 > \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K}.$$

Infatti: Partiamo dalla diseuguaglianza, evidente mente soddisfatta,

$$(m_1 + m_2)^2 > 0.$$

Da questa si possono dedurre successivamente le altre

$$(1 + m_1^2) + (1 + m_2^2) - 2(1 - m_1 m_2) > 0$$

$$\frac{e^2 v_1 N_1}{K_1} + \frac{e^2 v_2 N_2}{K_2} - 2(1 - m_1 m_2) > 0$$

$$e^2 v_1 N_1 K_2 + e^2 v_2 N_2 K_1 > 2 K_1 K_2 (1 - m_1 m_2)$$

$$+ K_1^2 (1 + m_1^2) + K_2^2 (1 + m_2^2) > 2 K_1 K_2 (1 - m_1 m_2) + K_1^2 (1 + m_1^2) + K_2^2 (1 + m_2^2)$$

$$+ e^2 v_1 N_1 K_2 + e^2 v_2 N_2 K_1 + e^2 v_1 N_1 K_1 + e^2 v_2 N_2 K_2 > (K_1 + K_2)^2 + (m_1 K_1 - m_2 K_2)^2$$

$$e^2 (v_1 N_1 + v_2 N_2) K > K^2 + \varepsilon^2$$

$$c_0 > \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K}.$$

Dalla diseuguaglianza (6) si deduce immediatamente che, per $\cos^2 lz < 1$, si ha sempre

$$(7) \quad c < c_0.$$

Infatti, nell'ipotesi che il campo non alteri le proprietà specifiche del conduttore, si ha $\sigma = c_0$ e quindi, per la (6), $\sigma' - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K} > 0$; la frazione

$$\frac{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz}{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz + K\sigma(1 - \cos^2 lz)},$$

il cui valore è sempre positivo, è mi-

(¹) La (5), in questo caso, si identifica con una delle formule stabilite dal prof. Corbino. Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 216.

nore di 1 se $\cos^2 lz$ è minore di 1; in tal caso si ha perciò

$$\left(\sigma - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K}\right) \frac{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz}{(K^2 + \varepsilon^2) \cos^2 lz + K\sigma(1 - \cos^2 lz)} < \sigma - \frac{K^2 + \varepsilon^2}{K}.$$

Questa diseuguaglianza è perfettamente equivalente alla (7).

Per $\cos^2 lz = 1$ si ha $c = c_0$.

La teoria elettronica di Drude prevede dunque, per un conduttore omogeneo ed isotropo, tenuto a temperatura costante e sottoposto all'azione di un campo magnetico uniforme, un apparente aumento di resistenza specifica in tutte le direzioni, fatta eccezione per quella delle linee di forza magnetiche: in quest'ultima direzione non prevede alcuna apparente alterazione della resistenza specifica.

K , σ , ε^2 non mutano quando si cambi H in $-H$; quindi c non muta all'invertire del campo magnetico, se non muta $\cos^2 lz$. Questa condizione è soddisfatta, per es., nel caso di una lamina disposta trasversalmente nel campo, perchè allora, qualunque sia il senso di quest'ultimo, si può ritenere $\cos lz = 0$; la detta condizione è pure soddisfatta nel caso di un filo, rettilineo o no, comunque orientato, poichè allora, sia col campo diretto, sia col campo inverso, la direzione della linea di flusso in ciascun punto del filo si può identificare con la direzione di quest'ultimo.

L'apparente conducibilità specifica c , poichè dipende da $\cos^2 lz$, varierà in genere da punto a punto, per un conduttore di forma qualsiasi. La dipendenza di c da $\cos^2 lz$ ci dice che la teoria prevede un'apparente anisotropia del conduttore [ciò che del resto ci dicono anche le equazioni (1)].

Nel seguente paragrafo esaminerò quale influenza abbia sulla resistenza globale di un conduttore posto in un campo magnetico, l'apparente variazione di resistenza specifica che la teoria prevede.

Astronomia. — Osservazioni di pianetini fatte all'equatoriale Dembowski di 187 mm. del R. Osservatorio di Padova. — Confronti. Nota di B. VIARO, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Le osservazioni sui pianetini (2) Pallas, (4) Vesta, (704) Interamnia e (354) Eleonora, il primo dei quali fu osservato nel 1914 e gli altri tre nel 1915, già pubblicate nelle pagine precedenti (1), furono messe a confronto con le effemeridi.

Gli O-C che si riferiscono ai primi due pianeti (2) Pallas, (4) Vesta, furono ottenuti confrontando le coordinate osservate con le coordinate calcolate dalle rispettive effemeridi inserite nei Nautical Almanac 1914 e 1915;

(1) Veggansi questi Rendiconti, vol. XXV (1916), 1° sem., pag. 782; 2° sem., pag. 68.