ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Sull' iterazione delle funzioni di variabili reali.* Nota di Giulio Andreoli, presentata dal Corrisp. R. Marcolongo [1].

1. In questa breve Nota è assegnata una condizione sufficiente affinchè le iterate successive d'una funzione di una variabile reale, ottenute partendo da un valore x, convergano tutte ad un valore X, radice dell'equazione

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\,,$$

per x qualunque, scelto in un intorno di X.

Lo stesso problema [2] si può porre per una n-pla di funzioni di n variabili reali, ove si studii l'intorno della n-pla soluzione del sistema

$$f_1(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) = \mathrm{X}_1\,; \ldots\,;$$

il teorema che enunciamo e la dimostrazione data, valgono ancora. Premettiamo un lemma:

Secondo che le iterate d'una funzione $f(x)$ convergono o no ad un valore limite X, *partendo da $x = x_0$, le iterate della funzione φ, definita da*

$$\varphi(g(y)) = g(f(y))\,,$$

ottenute partendo da un valore iniziale $y = y_0 = g(x_0)$, convergeranno o no al limite $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X})$, se la funzione g è invertibile e se essa e la sua inversa γ sono monotòne nel campo.

Infatti, in tal caso la g e la γ sono continue, e si può porre

$$\varphi(y) = g(f(\gamma(y)))\,,$$

e con la solita notazione delle iterate

$$\varphi_n(y) = g(f_n(\gamma(y)))\,;$$

epperò, posto $y = g(x)$,

$$\varphi_n(g(x)) = g(f_n(x))\,;$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 12 agosto 1916.

[2] La stessa quistione è stata trattata recentemente del sig. Tricomi: la condizione che egli assegna è un caso specialissimo di quella qui enunciata. — Per la bibliografia dell'argomento si può vedere la Nota del Tricomi: *Un teorema sulla convergenza delle successioni* ecc. (Giorn. Mat. di Battaglini, vol. LIV, ser. 3ª, 1916).

da cui, per la continuità di g e γ, si trae

$$\lim \varphi_n(y_0) = \lim \varphi_n(g(x_0)) = \lim g(f_n(x_0)) = g(\mathrm{X}) \quad (n \to \infty).$$

Se, in particolare, scegliamo come g la funzione $x - \mathrm{X}$, avremo che Y diventa zero, e la φ si annulla per $y = 0$. Quindi noi potremo, senza ledere la generalità, ridurci al caso che la $f(x)$ si annulli per $x = 0$ e che l'origine sia proprio il punto attorno a cui studiamo le iterate.

2. L'enunciato del teorema, per le funzioni di una variabile, è il seguente:

Se una funzione $f(x)$ che si annulla per $x = 0$, si può racchiudere tutta [1] *in un quadrato avente la retta $y = x$ come diagonale, il quale comprenda l'origine almeno sul contorno; se inoltre soddisfa, insieme ai suoi valori-limiti nei punti di discontinuità, alla*

$$f(x) \langle\langle\, [w\,,\, \psi(x)] \quad \text{(si legga inclusa nell'intervallo, estremi esclusi)}$$

ove la ψ è una funzione nulla per x eguale a zero, monotona, soddisfacente alla $\psi(\psi(x)) = x$; allora, scelto un x qualunque sulla porzione di asse interna al quadrato, le iterate della f, ottenute partendo da x, convergono a zero.

Cominciamo dall'osservare che la ψ è allora una funzione a periodo di iterazione 2: si ha cioè

$$\psi(\psi(x)) = x \;;\; \psi(\alpha) = \beta \;;\; \psi(\beta) = \alpha\,.$$

Siano ora

$$x_0\,, x_1\,, \ldots, x_n\,, \ldots$$

i successivi iterati della f; si abbia cioè

$$f(x_{n-1}) = x_n\,.$$

Poniamo $\mathrm{I}_n = (x_n\,, \psi(x_n))$: avremo

$$\mathrm{I}_{n+1} \langle\langle\, \mathrm{I}_n\,.$$

Infatti, per le ipotesi fatte,

$$x_{n+1} = f(x_n) \langle\langle\, [x_n\,,\, \psi(x_n)]\;;$$

cioè

$$x_{n+1} \langle\langle\, \mathrm{I}_n\,.$$

[1] Se soddisfa cioè alle condizioni

$$-\lambda_1^2 \leq f(x) \leq +\lambda_2^2$$
$$-\lambda_1^2 \leq x \leq \lambda_2^2\,.$$

Ora è facile vedere che, per le condizioni imposte, la ψ è negativa per x positivo, e positiva per x negativo: in caso contrario non potrebbe essere monotona, a periodo d'iterazione 2, e nulla per $x = 0$. Quindi l'intervallo I_n avrà un estremo positivo b_n ed uno negativo a_n (qualunque sia n) che coincidono, a meno dell'ordine, con x_n, $\psi(x_n)$ [si ha quindi: $\psi(a_n) = b_n$, $\psi(b_n) = a_n$].

3. Se ξ è un valore negativo dell'intervallo I_n, sarà, per la monotonia di ψ,

$$0 < \psi(\xi) \leq \psi(a_n)\,;$$

se invece è un valore positivo, per la stessa ragione avremo

$$0 > \psi(\xi) \geq \psi(b_n)\,;$$

i due segni d'eguaglianza sono raggiunti solo per $\xi = a_n$ o $\xi = b_n$. In ogni caso però, se escludiamo gli estremi, si ha

$$\psi(b_n) < \psi(\xi) < \psi(a_n)\,.$$

Ma, per le proprietà della ψ, essendo già $b_n = \psi(a_n)$, avremo (¹)

$$a_n = \psi(b_n) < \psi(\xi) < b_n = \psi(a_n)\,.$$

In particolare, se $\xi = x_{n+1}$, avremo

$$\varphi(x_{n+1}) \langle\langle\, I_n\,;$$

e tenuto conto che anche

$$x_{n+1} \langle\langle\, I_n\,,$$

avremo

$$I_{n+1} \langle\langle\, I_n\,.$$

Quindi gli intervalli I_{n+h} sono tutti interni ad I_n; epperò i loro estremi inferiori formano una successione negativa crescente $a_0, a_1, \ldots$; i superiori ne formano un'altra positiva decrescente $b_0, b_1, \ldots$ con la relazione

$$\psi(a_n) = b_n \;;\; \psi(b_n) = a_n\,.$$

4. Siano α e β i due limiti della successione a_n e della successione b_n; per la continuità (²) di ψ, sarà $\psi(\alpha) = \beta$, $\psi(\beta) = \alpha$, e possiamo avere i seguenti casi:

(¹) Si verificano quindi contemporaneamente le relazioni

$$u \langle\langle\, [v\,, \psi(v)] \quad , \quad \psi(u) \langle\langle\, [v\,, \psi(v)]\,.$$

(²) Se la ψ non fosse continua, basterebbe che fosse

$$\psi(\alpha) = \lim\sup \psi(\alpha - 0)$$

per α negativo, e

$$\psi(\beta) = \lim\sup (\beta + 0)$$

per β negativo: cioè la ψ sarebbe semicontinua superiormente a destra per x positivo ed a sinistra per x negativo.

Caso I. Fra le a si trovano infinite x_n, e fra le b anche; le x, supposto per semplicità x_0 negativo, saranno quindi distribuite nelle a, b nel seguente modo:

$$\begin{array}{l} a \equiv x_0\,,\, x_1\,, \dots x_m \quad,\, \psi(x_{m+1}) \dots \psi(x_n)\,,\, x_{n+1} \quad, \dots ,\, x_p \quad,\, \psi(x_{p+1})\,, \dots , \dots \\ b \equiv \psi(x_0) \quad, \dots \psi(x_m)\,,\, x_{m+1} \quad \dots x_n \quad,\, \psi(x_{n+1})\,, \dots ,\, \psi(x_p)\,,\, x_{p+1} \quad, \dots , \dots \end{array}$$

Consideriamo la successione $x_m, x_p, \dots$: essa tenderà ad α; così la successione $x_{m+1}, x_{p+1}, \dots$ tenderà a β.

D'altra parte però, $x_{m+1} = f(x_m)$; $x_{p+1} = f(x_p) \dots$

Quindi, le $x_{m+1}, x_{p+1}, \dots$ devono anche tendere ad $f(\alpha)$, se la f è ivi continua: o, più generalmente, il loro punto limite β sarà uno dei limiti $f(\alpha \pm 0)$ se f è discontinuo. Si ha quindi che la successione decrescente positiva

$$x_{m+1}\,,\, x_{p+1}\,, \dots$$

avendo un solo limite, sarà

$$f(\alpha \pm 0) = \psi(\alpha)\,;$$

il che si verifica solo per $\alpha = 0$, per le ipotesi fatte.

Quindi sarà

$$\lim a_n = \alpha = 0 \ ;\ \lim b_n = \psi(\alpha) = 0\,;$$

epperò anche $\lim x_n = 0$.

Caso II. Fra le a_n (o fra le b_n) si trova un numero finito di x.

Allora, da un certo m in poi, tutte le x_m appartengono alle b (o alle a).

Quindi la successione positiva decrescente (o negativa crescente)

$$x_m\,,\, x_{m+1}\,, \dots$$

tenderà al limite β (oppure α).

Ma $f(x_m) = x_{m+1}, \dots$: quindi β è uno dei valori $f(\beta \pm 0)$ [α è uno dei valori $f(\alpha \pm 0)$].

Ed anche questo avviene solo per $\beta = 0$ (o $\alpha = 0$): quindi sarà anche $\psi(\beta) = \alpha = 0$ [e rispettivamente $\beta = \psi(\alpha) = 0$]: cioè gli intervalli I_n tendono a zero, e con essi le x_n.

Con questi due casi, perciò, resta esaurita la dimostrazione del teorema enunciato.

5. Per il caso di n funzioni di n variabili, il teorema e la dimostrazione sussistono inalterati. Bisogna solo fare le seguenti convenzioni (o altre analoghe). Una n-pla di valori $[\xi] \equiv (\xi_1, \dots \xi_n)$ è minore di un'altra $(\eta_1, \dots \eta_n)$ se ogni ξ non è minore del corrispondente η, ed almeno uno è maggiore.

Una n-pla di funzioni si dirà crescente o decrescente (monotona) se dalle

$$[\xi'] < [\xi'']$$

si ricava sempre

$$\Big[f[\xi']\Big] < \Big[f[\xi'']\Big]$$

oppure sempre

$$\Big[f[\xi'']\Big] > \Big[f[\xi']\Big].$$

La n-pla nulla è composta da n zeri. Alla retta $y = x$ corrisponde lo spazio definito da

$$[\xi] = [\eta]$$

cioè da $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2$, ... $\xi_n = \eta_n$; alla curva ψ lo spazio

$$[\eta] = \Big[\psi[\xi]\Big]$$

ove la n-pla $\psi_1, \dots, \psi_n$ rappresenta una n-pla monotona, nulla per $[\xi] = 0$, ed eguale alla propria n-pla inversa; alla curva f, la n-pla $[f]$; e così via pel quadrato ecc.

In particolare, se si scelgono come funzioni $[f]$ le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(x_1 \dots x_n) &= f(x_2) \\ f_2(x_1 \dots x_n) &= f(x_3) \\ \dots\ &\ \dots \\ f_n(x_1 \dots x_n) &= f(x_1), \end{aligned}$$

si otterrà un teorema (come caso particolare di quello enunciato) riguardante le soluzioni del sistema

$$f(x_1) = x_2\ ,\ f(x_2) = x_3\ , \dots f(x_n) = x_1\ .$$

Notiamo, infine, che nel teorema del Tricomi la curva ψ è rappresentata da due segmenti di retta, uscenti dall'origine, simmetrici rispetto alla $y = x$: ciò che è conseguenza della relazione $\psi(x) = x$.

6. Come corollarî del teorema generale da noi dato, si ricavano facilmente le seguenti condizioni sufficienti:

I. Se la $f(x)$ è compresa nel quadrato, non minore di x, per x negativo, ed è positiva per x positivo.

II. Se la $f(x)$ è compresa nel quadrato, non maggiore di x, per x positivo, ed è negativa per x negativo,

Basta considerare nel I caso come curva ψ quella che per x negativo è eguale a $+\lambda_2^2$ e per x positivo è zero; pel secondo caso, invece, la ψ per x negativo è nulla, e per x positivo ha il valore costante $-\lambda_1^2$, ambedue essendo nulle per $x = 0$.