

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTI. PIO BEFANI

1916

lucenti e spessi la polarizzazione comincia ad essere sensibile per una larghezza di 50μ ; per i bordi molto sottili, solo per una larghezza di 10μ . Perchè questo effetto si verifichi è necessario che uno almeno dei bordi non sia assolutamente privo di potere riflettente, ma questo può essere anche molto piccolo. Man mano che la larghezza della fenditura diminuisce, la differenza di comportamento fra bordi di varie sostanze e di diverso grado di lucentezza va diminuendo, tanto che per le fenditure più sottili (larghezza $< 2 \mu$) non si hanno più differenze marcate fra fenditure a bordi dielettrici o conduttori, trasparenti o opachi, isotropi o anisotropi, colorati o incolori. Fino in corrispondenza ad una larghezza di $0,3 \mu$ la polarizzazione è sempre normale ai bordi, essa cresce col diminuire della larghezza pressochè linearmente, ma con due velocità diverse: assai lentamente fino a $1,5 \mu$ e molto più rapidamente per larghezze inferiori; è meno marcata, a parità di larghezza, nelle fenditure a bordi molto sottili. Se la larghezza è inferiore a $0,2 \mu$, la polarizzazione diventa parallela ai bordi; l'inversione deve aver luogo per una larghezza di $0,2-0,3 \mu$. L'effetto è *in ogni caso* più grande per la luce rossa che non per la luce bleu.

Oltre a questa polarizzazione parziale, compare spesso anche una differenza di fase fra le componenti rispettivamente normale e parallela ai bordi. Nel caso di fenditure a bordi spessi, la componente parallela è *ritardata* rispetto alla normale per i metalli, *accelerata* invece per i dielettrici. Per le fenditure metalliche nelle quali lo spessore dei bordi è dell'ordine della lunghezza d'onda luminosa il segno della differenza di fase cambia (la componente parallela risulta *accelerata*) e il suo valore assoluto è, a parità di larghezza della fenditura, molto minore. Questa differenza di fase comincia ad essere sensibile in corrispondenza a larghezze minori di quelle per le quali si incomincia ad avere l'effetto polarizzante: essa è, nelle fenditure metalliche a bordi spessi, tanto più marcata quanto più forte è il potere riflettente dei bordi.

Fisica matematica. — *Sulla variazione di resistenza elettrica di un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico.* Nota II della dott.^{ssa} ELENA FREDA, presentata dal Socio V. VOLTERRA (1).

4. Esaminiamo il caso di un conduttore in cui, con o senza l'azione del campo, le linee di flusso rimangono le stesse e resta lo stesso in ciascun punto di esse il valore della densità di corrente, se si lascia inalterata la corrente totale che attraversa il conduttore (questa condizione si può, ad es., ritenere soddisfatta nel caso di un filo metallico, rettilineo o no, comunque

(1) Pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1916.

disposto nel campo). Dalla uguaglianza (5) si deduce che la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso, l , è uguale per $|H|=0$ e per $|H|>0$ solo se l è una retta parallela all'asse z ; se non è soddisfatta questa condizione, la detta differenza di potenziale aumenta sotto l'azione del campo; tale aumento della differenza di potenziale fra due punti di una stessa linea di flusso può interpretarsi come un aumento della resistenza del conduttore.

Consideriamo un conduttore nel quale, per $H=0$, le linee di flusso siano rette parallele all'asse z ; per es. una lamina rettangolare fornita lungo due lati opposti di elettrodi di resistenza trascurabile e disposta parallelamente all'asse z , in modo che gli elettrodi risultino perpendicolari allo stesso asse. La teoria prevede, come facilmente si verifica, che sotto l'azione del campo rimangano inalterate le linee di flusso e rimanga inalterato in ciascun punto di esse il valore della densità di corrente, se si mantiene costante l'intensità della corrente totale che attraversa il conduttore. Dunque, per quanto precedentemente si è detto, la teoria non prevede che il campo magnetico determini un aumento della differenza di potenziale tra i due elettrodi della lamina, cioè un apparente aumento della resistenza di questa ultima, come non prevede che il campo determini un apparente aumento della resistenza di un filo rettilineo, disposto parallelamente alle linee di forza magnetiche.

Consideriamo ora una lamina disposta perpendicolarmente alle linee di forza del campo; se il suo spessore è molto piccolo, si può ritenere che il movimento della elettricità avvenga in un piano. Allora, come ha dimostrato il prof. Volterra (1), se gli elettrodi sono puntiformi e al contorno, l'azione del campo magnetico non altera le linee di flusso, nè il valore della densità di corrente in ciascun punto di esse quando si mantenga costante l'intensità della corrente totale che attraversa la lamina. Di più in questo caso l'apparente conducibilità specifica c , corrispondente ad un determinato valore di H , è costante in ogni punto di una qualsiasi linea di flusso (perchè si ha in un ogni punto $\cos l_z=0$) e non dipende dal senso del campo. In questo caso il rapporto dei valori che la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso (non coincidenti con gli elettrodi) assume, prima e dopo la creazione del campo magnetico, è uguale al rapporto della resistenza specifica $\frac{1}{c_0}$ che la lamina ha fuori del campo e dell'apparente resistenza specifica $\frac{1}{c}$ determinata da quest'ultimo. Per una lamina disposta trasversalmente nel campo magnetico e fornita di elettrodi puntiformi al contorno, la teoria prevede dunque un apparente aumento $\Delta\rho$ di resistenza;

(1) Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1915, pag. 294.

il rapporto tra Δq e la resistenza e_0 fuori del campo magnetico, dipende solo dall'intensità di quest'ultimo e dalle proprietà specifiche della sostanza conduttrice; tale rapporto non muta cambiando H in $-H$. Lo stesso può dirsi per un filo metallico rettilineo, inclinato rispetto alle linee di forza del campo magnetico. (Anche in questo caso, $\cos \alpha$ è costante in ogni punto del conduttore).

In una lamina disposta trasversalmente nel campo, ma non fornita di elettrodi puntiformi situati al contorno (per es. in una lamina rettangolare lungo due lati opposti della quale siano saldati due elettrodi di resistenza trascurabile), per azione del campo muta non solo la distribuzione dei potenziali, ma anche quella delle correnti. In questo caso il rapporto tra i valori che assume, per $|H|=0$ e per $|H|>0$, la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso o tra due elettrodi di resistenza trascurabile, dipenderà non solo dall'apparente aumento di resistenza specifica di cui già ho parlato, ma anche dall'alterata distribuzione delle correnti; in questo caso il rapporto $\frac{\Delta q}{e_0}$ dipenderà, in genere, non solo dalle proprietà specifiche della sostanza conduttrice e dall'intensità del campo, ma anche dalla forma e dalle dimensioni della lamina e dalla posizione degli elettrodi (1).

Le precedenti osservazioni possono in parte spiegare le divergenze dei risultati ottenuti da diversi sperimentatori i quali hanno misurato, in condizioni diverse, la variazione di resistenza di un conduttore nel campo.

5. Prenderò in esame ancora un fatto che è stato attribuito ad una alterazione di proprietà specifiche determinata dal campo nelle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione.

Consideriamo una lamina metallica avente la forma di una corona circolare, fornita, lungo i due cerchi concentrici che la limitano, di due elettrodi di resistenza trascurabile. Se la lamina è disposta perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico uniforme, sotto l'azione di questo ultimo, come è noto (2), le linee equipotenziali restano cerchi aventi il centro nel centro della lamina; le linee di flusso invece, radiali senza il campo magnetico, diventano per azione di quest'ultimo spirali logaritmiche. Si può considerare perciò la lamina come percorsa da correnti circolari e da correnti radiali; a causa delle prime, la lamina può esercitare su una bobina concentrica, che la circonda e sia disposta anch'essa perpendicolarmente alle

(1) Secondo recenti esperienze, la resistenza di una lamina rettangolare di bismuto, disposta trasversalmente in un campo magnetico uniforme, aumenta di più quando la lamina è munita lungo due suoi lati opposti di elettrodi di resistenza trascurabile, che non quando la lamina è munita di due elettrodi puntiformi al contorno (Corbino e Trabacchi, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 806).

(2) Corbino, Nuovo Cimento, VI serie, I, 1911, pag. 397.

linee di forza del campo, un'azione induttiva (effetto Corbino). Sia I l'intensità della corrente totale che attraversa la lamina, s lo spessore di questa ultima. Si può porre $I = I_1 + I_2$, indicando con I_1 la corrente determinata dagli ioni positivi, con I_2 quella determinata dagli ioni negativi. Si trova allora ⁽¹⁾ che, in un punto alla distanza r dal centro della lamina, le densità delle correnti circolari determinate dagli ioni positivi e dagli ioni negativi, sono rispettivamente $\frac{m_1 I_1}{2\pi sr}$, $\frac{-m_2 I_2}{2\pi sr}$ (m_1 , m_2 hanno lo stesso significato che nel § 2); che quindi l'azione della lamina è proporzionale, con un coefficiente che dipende solo dalle dimensioni di quest'ultima, a

$$e H(v_1 I_1 - v_2 I_2);$$

o anche, se s'indica con σ la conducibilità specifica del metallo di cui la lamina è formata, con σ_1 la conducibilità specifica relativa agli ioni positivi, con σ_2 quella relativa agli ioni negativi e si pone $I_1 = I \frac{\sigma_1}{\sigma}$, $I_2 = I \frac{\sigma_2}{\sigma}$, che l'azione induttiva della lamina è proporzionale ad $e H I \frac{v_1 \sigma_1 - v_2 \sigma_2}{\sigma}$.

Il prof. Corbino ha trovato sperimentalmente, servendosi di una lamina di bismuto, che in realtà l'azione induttiva cresce più lentamente del campo, anche fatte le dovute correzioni relative alla presenza del ferro nell'elettromagnete. Adams e Chapman ⁽²⁾, studiando l'effetto Corbino in molti altri metalli, hanno trovato in genere lo stesso risultato. Esso può attribuirsi, secondo Adams ⁽³⁾, ad una vera e propria alterazione delle proprietà specifiche del metallo determinata dal campo.

Mi propongo di mostrare come, dalle formule stesse stabilite dal professore Corbino nel suo lavoro a cui precedentemente mi sono riferita, si può dedurre che la teoria prevede, almeno qualitativamente, il risultato sperimentale sopra considerato.

Le equazioni differenziali del movimento di uno ione positivo sono, in coordinate polari,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} r_1 \frac{d\theta_1}{dt} &= e v_1 H \frac{dr_1}{dt}; & \frac{dr_1}{dt} &= e \dot{v}_1 \left(F - H r_1 \frac{d\theta_1}{dt} \right) \end{aligned} \right.$$

(F, forza elettrica).

Da esse si deduce

$$(9) \quad \frac{dr_1}{dt} = \frac{e v_1}{1 + m_1^2} F.$$

⁽¹⁾ Corbino, loc. cit.

⁽²⁾ Phil. Mag., 1914, XXVIII, pag. 692.

⁽³⁾ Phil. Mag., 1914, XXVII, pag. 249.

Analogamente per uno ione negativo si ha

$$(10) \quad \frac{dr_2}{dt} = \frac{-e v_2}{1 + m_2^2} F;$$

I_1, I_2 si esprimono per mezzo delle velocità radiali degli ioni nel modo seguente:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = 2\pi r s e N_1 \frac{dr_1}{dt} \\ I_2 = -2\pi r s e N_2 \frac{dr_2}{dt} \end{array} \right.;$$

si avrà quindi, per le (9) e (10),

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = 2\pi r s \frac{e^2 v_1 N_1}{1 + m_1^2} F = 2\pi r s K_1 F \\ I_2 = 2\pi r s \frac{e^2 v_2 N_2}{1 + m_2^2} F = 2\pi r s K_2 F \end{array} \right.$$

$$(13) \quad I = I_1 + I_2 = 2\pi r s K F.$$

Dunque si ha:

$$I_1 = I \frac{K_1}{K}, \quad I_2 = I \frac{K_2}{K}.$$

L'azione induttiva della lamina è perciò rappresentata, a meno di un fattore dipendente solo dalle sue dimensioni, da $e H I \frac{v_1 K_1 - v_2 K_2}{K}$; la sua dipendenza dal campo non è perciò la semplice proporzionalità.

Il prof. Corbino ha osservato, per il bismuto, che l'azione prevalente è esercitata dagli ioni negativi. Adams e Chapman, per tutti i metalli presi in esame, hanno trovato che l'effetto Corbino ha lo stesso segno che per il bismuto. Si può dunque ritenere, per tutti i metalli che sono stati studiati, $\frac{v_2 K_2 - v_1 K_1}{K} > 0$. Per dimostrare che la teoria prevede che l'effetto Corbino debba crescere più lentamente del campo, basta dunque dimostrare che, se

$$H_1 > H_2,$$

posto

$$m_{11} = e v_1 H_1, \quad m_{12} = e v_2 H_1, \quad m_{21} = e v_1 H_2, \quad m_{22} = e v_2 H_2,$$

$$K_{11} = \frac{e^2 v_1 N_1}{1 + m_{11}^2}, \quad K_{12} = \frac{e^2 v_2 N_2}{1 + m_{12}^2}, \quad K_{21} = \frac{e^2 v_1 N_1}{1 + m_{21}^2}, \quad K_{22} = \frac{e^2 v_2 N_2}{1 + m_{22}^2},$$

$$K' = K_{11} + K_{12}, \quad K'' = K_{21} + K_{22},$$

si ha

$$(14) \quad \frac{v_2 K_{22} - v_1 K_{21}}{K''} > \frac{v_2 K_{12} - v_1 K_{11}}{K'}$$

Dalla diseuguaglianza $H_1 > H_2$, poichè la mobilità v_2 degli ioni negativi deve ritenersi maggiore di quella v_1 degli ioni positivi, si ricava

$$e^* H_1^2 (v_2^2 - v_1^2) > e^* H_2^2 (v_2^2 - v_1^2).$$

Da questa diseuguaglianza, come facilmente si verifica, si deducono successivamente le altre

$$\begin{aligned} m_{12}^2 + m_{21}^2 &> m_{22}^2 + m_{11}^2 \\ m_{12}^2 + m_{21}^2 + 1 + m_{12}^2 m_{21}^2 &> m_{22}^2 + m_{11}^2 + 1 + m_{22}^2 m_{11}^2 \\ \frac{1}{(1 + m_{22}^2)(1 + m_{11}^2)} &> \frac{1}{(1 + m_{21}^2)(1 + m_{12}^2)} \\ (v_1 + v_2) K_{22} K_{11} &> (v_1 + v_2) K_{21} K_{12} \\ v_2 K_{22}(K_{11} + K_{12}) + v_1 K_{11}(K_{21} + K_{22}) &> v_2 K_{12}(K_{21} + K_{22}) + v_1 K_{21}(K_{11} + K_{12}) \\ v_2 K_{22} K' - v_1 K_{21} K' &> v_2 K_{12} K'' - v_1 K_{11} K'' \\ \frac{v_2 K_{22} - v_1 K_{21}}{K''} &> \frac{v_2 K_{12} - v_1 K_{11}}{K'} \end{aligned}$$

Osserviamo che tutti i risultati contenuti in questo e nei precedenti paragrafi valgono nell'ipotesi che la mobilità v_1 degli ioni positivi non sia nulla.

6. Se si prescinde dalle sostanze ferro-magnetiche (per le quali l'alterazione di proprietà specifiche determinata dal campo è evidente, anche pel fatto che è stata osservata una variazione rimanente di resistenza) ⁽¹⁾ e ci si limita a considerare le sostanze che si comportano come il bismuto, si può asserire che, per quanto riguarda il movimento della elettricità perpendicolarmente alle linee di forza magnetiche, i risultati teorici contenuti nei precedenti paragrafi si accordano, almeno qualitativamente, coi fenomeni, interpretabili come una variazione di resistenza prodotta dal campo, che le esperienze hanno constatato. Con ciò non è escluso che quei risultati sperimentali possano essere determinati, in parte, da una vera e propria alterazione di proprietà specifiche prodotta dal campo magnetico nei conduttori sottoposti alla sua azione.

Per poter stabilire in modo certo se questa ipotesi è o no necessaria, occorrerebbe sapere se l'accordo tra la teoria e le esperienze c'è anche dal punto di vista quantitativo. È per ora impossibile stabilire ciò, perchè non si hanno determinazioni attendibili dei valori di v_1, v_2, N_1, N_2 . L'ipotesi che il campo determini nelle sostanze conduttrici sottoposte alla sua azione un vero e proprio mutamento delle loro proprietà specifiche, nelle direzioni

⁽¹⁾ Goldhammer, Annalen der Physik, XXXI. pag. 360, an. 1887; XXXVI, pag. 804, an. 1889.

perpendicolari a quella delle linee di forza magnetiche, non è resa assolutamente necessaria neppure dal fatto, osservato recentemente dal dott. Trabacchi (1), che per laminette di bismuto aventi la stessa forma ma struttura diversa (alcune preparate facendo solidificare in appositi stampi del bismuto fuso, altre ottenute comprimendo delle polveri dello stesso metallo) l'effetto Hall può ritenersi uguale, mentre la variazione di resistenza passa da un valore non trascurabile ad un altro praticamente nullo. Infatti, secondo la teoria, l'effetto Hall e la variazione di resistenza, quando si misurino come

ha fatto il dott. Trabacchi, dipendono rispettivamente da $\frac{\epsilon}{K^2 + \epsilon^2}$ (2) e

da $\left[\frac{K}{K^2 + \epsilon^2} - r_0 \right]$ (r_0 , resistenza specifica fuori del campo) (3). Queste

due grandezze varieranno al variare della struttura del metallo, perchè varieranno, in genere, $v_1 v_2 N_1 N_2$; ora non si può escludere *a priori* che in qualche caso non possa avvenire che la prima grandezza resti praticamente inalterata e vari invece sensibilmente la seconda; non si può dunque asserire senz'altro che i risultati sperimentali ricordati siano inconciliabili con la teoria. D'altra parte non sembra che, accettando la detta ipotesi, si renda più immediata e soddisfacente la spiegazione di tali risultati, perchè anche in questo caso la teoria prevede che l'effetto Hall e la variazione di resi-

stenza dipendano dalle due grandezze $\frac{\epsilon}{K^2 + \epsilon^2}$, $\left[\frac{K}{K^2 + \epsilon^2} - r_0 \right]$; solo si debbono ritenere $v_1 v_2 N_1 N_2$ funzioni del valore assoluto di H (funzioni diverse in corrispondenza alle diverse strutture del metallo).

Se si considera invece il caso in cui il movimento della elettricità avviene parallelamente alle linee di forza del campo, si deve riconoscere che la teoria non prevede l'aumento di resistenza che le esperienze hanno constatato. Non è facile decidere se ciò sia dovuto ad una vera e propria alterazione delle proprietà dei conduttori determinata dal campo, o al fatto che le condizioni supposte dalla teoria sono realizzate solo approssimativamente in pratica, o alla sovrapposizione di qualche altro fenomeno a quelli che la teoria considera.

Terminerò osservando che, se anche si ammette che in un conduttore sottoposto all'azione di un campo magnetico ci sia in tutte le direzioni, incluse quelle perpendicolari alla direzione del campo, una vera e propria alterazione di resistenza (dovuta ad un'alterazione temporanea della natura del metallo), si deve pur sempre tener conto della sovrapposizione, a questo fenomeno, dell'apparente mutamento di resistenza che la teoria prevede. Così

(1) Rend. Accad. Lincei, 1° sem. 1915, pag. 1053.

(2) Corbino, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 213; Tasca, Rend. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1915, pag. 336.

(3) Cfr. i paragrafi 3 e 4.

nel caso di una lamina disposta trasversalmente nel campo e fornita di due elettrodi puntiformi situati al contorno, o nel caso di un filo metallico disposto in un piano perpendicolare alle linee di forza magnetiche, se le costanti $v_1 v_2 N_1 N_2$ per azione del campo diventano delle funzioni $\mu_1 \mu_2 v_1 v_2$ del valore assoluto di quest'ultimo (per evidenti ragioni di simmetria $\mu_1 \mu_2 v_1 v_2$ avranno gli stessi valori in tutti i punti della lamina o del filo) la variazione di resistenza che si constata esaminando la differenza di potenziale tra due punti di una stessa linea di flusso (mentre si mantiene costante la corrente totale che attraversa il conduttore) deve considerarsi come la somma di due parti: l'una dovuta alla vera e propria alterazione di resistenza specifica $r_1 - r_0$; l'altra dovuta all'apparente variazione di resistenza specifica $r - r_1$, che la teoria prevede. Posto

$$p_1 = e \mu_1 H, \quad p_2 = e \mu_2 H, \quad S_1 = \frac{e^2 \mu_1 v_1}{1 + p_1^2}, \quad S_2 = \frac{e^2 \mu_2 v_2}{1 + p_2^2},$$

$$S = S_1 + S_2, \quad T = p_1 S_1 - p_2 S_2,$$

si ha

$$r_1 - r_0 = \frac{1}{e^2(v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2)} - \frac{1}{e^2(N_1 v_1 + N_2 v_2)},$$

$$r - r_1 = \frac{S}{S^2 + T^2} - \frac{1}{e^2(v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2)}.$$

E. M.