ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Meccanica. — *Sul moto traslatorio di un solido sferico in un liquido viscoso.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrispondente E. ALMANSI [1].

In questa Nota, sfruttando l'osservazione fatta nella precedente [2], mi propongo di dare un nuovo metodo per la risoluzione del problema (già trattato, in casi particolari, dallo Stokes e dal Basset, e condotto a termine, esaurientemente, dal Picciati) [3] che riguarda la determinazione del moto lento e regolare del liquido, nel caso particolare che il solido immerso sia sferico, prefissate la completa aderenza fra solido e liquido, la quiete del liquido all'infinito e la condizione iniziale.

Supporremo che il movimento in discorso avvenga secondo piani passanti per un diametro di quella sfera e nello stesso modo in ciascuno di cotesti piani; talchè, richiamando la funzione F, da me introdotta nella precedente Nota, avremo da integrare l'equazione

$$(1) \qquad \frac{\partial \Delta^2 F}{\partial t} = \nu \Delta^4 F ,$$

prefissate le condizioni che verranno scritte qui appresso. Intanto si osservi che, assunto un sistema ausiliario di coordinate polari ϱ, θ, φ (dove θ sia

[1] Presentata all'Accademia il 25 agosto 1916.

[2] Rend. della R. Accad. dei Lincei, 2° semestre 1916, pag. 102.

[3] Ibid., 1° sem. 1907, pag. 943.

la colatitudine), il quale sistema abbia, come asse polare, l'asse del suddetto fascio di piani, e ritenendo, nel presente caso, la F funzione delle sole variabili ϱ e t, si hanno facilmente le seguenti espressioni delle componenti P e Θ della velocità [1]:

$$P = \frac{2\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial\varrho} \quad , \quad \Theta = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varrho}\left(\frac{\partial F}{\partial\varrho} + \varrho\frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2}\right).$$

Inoltre, trattandosi di moto lento, può supporsi, senza cambiare nessuna scrittura, che il suddetto sistema di coordinate polari sia invariabilmente collegato col solido [2]. Ciò premesso, l'origine del sistema stesso verrà supposta coincidente col centro della sfera. Quindi, dovendo essere

$$(P)_{\varrho=a} = V(t)\cos\theta \; , \quad (\Theta)_{\varrho=a} = -V(t)\operatorname{sen}\theta \, ,$$

denotando a la grandezza del raggio della sfera e $V(t)$ la misura della velocità della sfera stessa cioè del solido, avremo le condizioni ai limiti

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{a}\left(\frac{\partial F}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=a} = V(t) \quad , \quad \frac{1}{a}\left(\frac{\partial F}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=a} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2}\right)_{\varrho=a} = V(t)\, , \\ &\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=\infty} = 0 \quad , \quad \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2}\right)_{\varrho=\infty} = 0\, , \end{aligned}\right.$$

(1) Infatti, denotando ψ la funzione di corrente, di cui è parola nella precedente Nota, avremo

$$R = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad , \quad Z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\, ,$$

essendo R e Z le componenti della velocità rispettivamente secondo r e secondo z. Ma, tenendo presente che

$$\left\{\begin{aligned} P &= R\operatorname{sen}\theta + Z\cos\theta \\ \Theta &= R\cos\theta - Z\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right.$$

e che, per essere $r = \varrho\operatorname{sen}\theta$, $z = \varrho\cos\theta$, si ha

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\varrho\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} \quad , \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\cos\theta}{\varrho^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\, ,$$

resulta

$$P = \frac{1}{\varrho^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad , \quad \Theta = -\frac{1}{\varrho\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho}\, .$$

Talchè, essendo $\psi = r\dfrac{\partial F}{\partial r}$ ed essendo, inoltre, nel presente caso, F funzione soltanto delle ϱ, t, avremo

$$\psi = \varrho\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial F}{\partial\varrho}\, ,$$

e quindi

$$P = \frac{2\cos\theta}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial\varrho} \quad , \quad \Theta = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\varrho}\left(\frac{\partial F}{\partial\varrho} + \varrho\frac{\partial^2 F}{\partial\varrho^2}\right).$$

(2) Cfr. Picciati, loc. cit., pag. 945.

che equivalgono, nel nostro caso, alle seguenti:

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \dfrac{a}{2}\, V(t) \;, & (\Delta^2 F)_{\varrho=a} = \dfrac{3}{2}\, V(t) \,, \\ \left(\dfrac{1}{\varrho}\,\dfrac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\infty} = 0 \;, & (\Delta^2 F)_{\varrho=\infty} = 0 \,. \end{cases}$$

Inoltre, denotando con $F_0(\varrho)$ una funzione assegnata con le restrizioni

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \dfrac{a}{2}\, V(0) \;, & (\Delta^2 F_0)_{\varrho=a} = \dfrac{3}{2}\, V(0) \,, \\ \left(\dfrac{1}{\varrho}\,\dfrac{dF_0}{d\varrho}\right)_{\varrho=\infty} = 0 \;, & (\Delta^2 F_0)_{\varrho=\infty} = 0 \,, \end{cases}$$

avremo la condizione iniziale

$$\text{(3)}\qquad (F)_{t=0} = F_0 + \text{costante arbitraria}.$$

Ora, si ponga

$$\text{(4)}\qquad \varrho\, \Delta^2 F = g(\varrho\,, t) \,,$$

cioè

$$\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2\,\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right) = g(\varrho\,, t) \,,$$

da cui

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = \frac{K_1(t)}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\int_a^\varrho \lambda g(\lambda\,, t)\, d\lambda \,.$$

E, tenendo presente la condizione

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \frac{a}{2}\, V(t) \,,$$

si assuma

$$K_1(t) = \frac{a^3}{2}\, V(t) \,.$$

Avremo

$$F = -\frac{a^3 V(t)}{2\varrho} + \int_a^\varrho \frac{d\beta}{\beta^2}\int_a^\beta \lambda g(\lambda\,, t)\, d\lambda + K(t)$$

dove $K(t)$ rappresenta una funzione arbitraria, per noi inessenziale, del tempo.

Si osservi che, sostituendo nella (1), al posto di $\Delta^2 F$, l'espressione che resulta dalla (4), si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nu\,\frac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2} \,.$$

Ciò premesso, dimostreremo che, se dell'equazione

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 H}{\partial \varrho^2} \tag{5}$$

(avente il tipo dell'equazione relativa alla propagazione del calore in un filo omogeneo) denotiamo con $g(\varrho, t)$ la soluzione regolare soddisfacente alle seguenti condizioni [1]:

$$(g)_{\varrho=a} = \frac{3a}{2} V(t) \,, \quad (g)_{\varrho=\infty} = 0 \,, \quad (g)_{t=0} = \varrho \Delta^2 F_0 \tag{6}$$

e formiamo la funzione

$$F = -\frac{a^3 V(t)}{2\varrho} + \int_a^\varrho \frac{d\beta}{\beta^2} \int_a^\beta \lambda g(\lambda, t) \, d\lambda + K(t) \,, \tag{7}$$

la funzione (7) medesima sarà, della (1), nello spazio occupato dal liquido, soluzione regolare soddisfacente alle condizioni (2) e (3). Le condizioni (6) resulteranno, cioè, certamente sufficienti per la costruzione della (F), mantenendo, naturalmente, alla $g(\varrho, t)$ il significato di soluzione regolare della (5). Infatti, essendo chiaro che la (7) resulterà, nello spazio occupato dal liquido, soluzione regolare della (1) ed avendosi

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=a} = \frac{a}{2} V(t) \,,$$

basterà mostrare che delle (2) resultano soddisfatte anche le rimanenti e che, inoltre, resulta soddisfatta la (3).

[1] L'integrale regolare dell'equazione della propagazione del calore in un filo omogeneo, tenendo conto delle condizioni ai limiti che valgono ad individuarlo, fu dato, sotto forma semplice e compendiosa, dal Picciati, applicando i metodi generali del Volterra (Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1907, pag. 750). Si ha

$$g(\varrho, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu t}} \int_a^\infty g_0(\beta) \left\{ e^{-\frac{(\beta-\varrho)^2}{4\nu t}} - e^{-\frac{(\beta-2a+\varrho)^2}{4\nu t}} \right\} d\beta + \\ + \frac{3a}{4\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t V(\tau) \, e^{-\frac{(\varrho-a)^2}{4\nu(t-\tau)}} (\varrho - a)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \,,$$

dove $g_0(\beta, t) = \{ g(\beta, t) \}_{t=0}$ e gli altri simboli hanno noti significati.

Intanto, tenendo presente la prima delle (6) ed osservando che dalla (7) discende

$$\varrho \Delta^2 F = g(\varrho, t),$$

avremo

$$(\Delta^2 F)_{\varrho = a} = \frac{3}{2} V(t).$$

A causa, poi, della seconda delle (6), si vede facilmente che

$$\left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial F}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = \infty} = 0 \quad \text{e} \quad (\Delta^2 F)_{\varrho = \infty} = 0.$$

Infine, osservando che la terza delle (6) può scriversi

$$(g)_{t=0} = \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(F_0 + \varrho \frac{dF_0}{d\varrho}\right)$$

e che, dalla (7), si ha

$$(F)_{t=0} = -\frac{a^3 V(0)}{2\varrho} + \int_a^\beta \frac{d\beta}{\beta^2} \int_a^\beta \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(F_0 + \lambda \frac{dF_0}{d\lambda}\right) d\lambda + K(0),$$

resulta facilmente

$$(F)_{t=0} = F_0 + \text{costante arbitraria},$$

mediante opportune integrazioni per parti e tenendo, poi, presente che

$$\left(\frac{dF_0}{d\varrho}\right)_{\varrho = a} = \frac{a}{2} V(0).$$

Le condizioni (6) sono, dunque, certamente sufficienti, affinchè, mantenendo alla $g(\varrho, t)$ il significato di soluzione regolare della (5), la funzione (7) resulti della (1), nello spazio occupato dal liquido, soluzione regolare soddisfacente alle condizioni (2) e (3).