ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Sull'iterazione delle funzioni di una variabile complessa.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO [1].

Oggetto di questa breve Nota è l'estensione al campo complesso di un teorema sull'iterazione delle funzioni di una variabile reale, da me precedentemente dato [2], e che recentemente è stato generalizzato, sempre restando nel campo reale, dal sig. G. Andreoli [3].

È noto che se $F(z)$ è una funzione monodroma in una certa area S, e tale che $F(z)$, comunque sia scelto il punto z in quest'area, sia un punto dell'area stessa; dato che la successione formata dalle successive *iterate* di F in un punto z_0 di S, cioè la successione

$$z_0\,,\ z_1 = F(z_0)\,,\ z_2 = F(z_1)\,, \ldots$$

sia convergente [4], ed abbia per limite Z, Z soddisfa all'equazione (di Schroeder)

$$z - F(z) = 0\,. \tag{1}$$

Si vede da ciò l'importanza delle radici della (1) nelle questioni di iterazione.

Noi ci proponiamo anzitutto di dimostrare una semplice proprietà che permette di ridursi sempre al caso di $Z = 0$ [5].

Consideriamo la funzione

$$\Phi(z) = Z - F(Z - z)\,,$$

che soddisfa alla condizione $\Phi(0) = 0$; dico che secondochè la successione

$$z_0\,,\ z_1 = \Phi(z_0)\,,\ z_2 = \Phi(z_1)\,, \ldots \tag{Φ}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° settembre 1916.

[2] Francesco Tricomi, *Un teorema sulla convergenza delle successioni formate dalle successive iterate di una funzione di una variabile reale* [Giorn. di Mat. di Battaglini, ser. 3ª, vol. LIV (1916)].

[3] Giulio Andreoli, *Sull'iterazione delle funzioni di variabili reali* [Rend. R. Acc. dei Lincei, ser. 5ª, vol. XXV, 2° sem. (1916)].

[4] Qui e nel seguito si dà al verbo *convergere* il senso più ampio, cioè si intendono per successioni *convergenti* quelle successioni che da taluni (p. es. dal Koenigs) vengono dette *regolarmente convergenti*.

[5] Questa proprietà è un caso particolare di una più generale, per la quale si può vedere il lavoro citato di Andreoli.

converge o no a 0, la successione

$$z'_0 = Z - z_0 \;,\; z'_1 = F(z'_0) \;,\; z'_2 = F(z'_1) \;, \dots \tag{F}$$

converge o no a Z.

Infatti si ha

$$z'_1 = Z - z_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$z'_n = Z - z_n$$

$$\dots\dots\dots$$

ora le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le successioni (Φ) ed (F) convergano rispettivamente a 0 e Z sono che, fissato ad arbitrio il numero positivo ε, si possa trovare un intero ν tale che per ogni $n > \nu$ sia rispettivamente

$$|z_n| < \varepsilon$$

e

$$|Z - z'_n| < \varepsilon ,$$

dunque, essendo $z_n = Z - z'_n$ l'assunto è dimostrato.

Dopo ciò passiamo alla considerazione del sistema Σ di curve del piano complesso, rappresentato in coordinate polari ϱ e θ dall'equazione

$$\varrho = \varphi(\theta \,,\, \lambda) \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad \lambda \geq 0 \,, \tag{2}$$

dove φ è una funzione reale delle due variabili reali θ e λ, che soddisfi alle condizioni

$$\varphi(\theta \,,\, 0) = 0 \quad ; \quad \varphi(\theta \,,\, \lambda) > 0 \quad , \quad \lambda > 0 \,, \tag{3}$$

e sia *sempre crescente* per λ crescente, e quindi *invertibile* rispetto a questa variabile, cioè tale che la (2) definisca λ come funzione monodroma di θ e ϱ:

$$\lambda = \varphi_1(\theta \,,\, \varrho) \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad , \quad \varrho \geq 0 \,. \tag{4}$$

Notiamo che la funzione φ_1 è *sempre crescente* per ϱ crescente e soddisfa a condizioni analoghe alle (3), e precisamente alle condizioni

$$\varphi_1(\theta \,,\, 0) = 0 \quad ; \quad \varphi_1(\theta \,,\, \varrho) > 0 \quad , \quad \varrho > 0 \,. \tag{5}$$

Stabiliremo ora alcune proposizioni relative a questo sistema Σ, nelle quali, come pure nel seguito, useremo il simbolo $[a]$ per indicare l'*argomento* di un numero complesso a (analogo al simbolo $|a|$ che si usa per il *modulo*), e il simbolo P(a) per indicare che il punto P è l'*indice* del numero complesso a:

I) Per un punto qualunque $P(a)$ del piano passa *una* curva σ_P del sistema Σ, e precisamente quella che corrisponde a

$$\lambda = \varphi_1([a], |a|);$$

pertanto si può dare il nome di *fascio* al sistema Σ.

II) Ogni semiretta uscente dal punto 0 riscontra una qualunque curva del fascio Σ in *un* punto.

III) Si dirà che un punto P è *interno* ad una curva σ del fascio Σ se esso, sulla semiretta OP, cade fra O ed il punto in cui OP sega σ. Il punto O è da considerarsi interno a tutte le curve del fascio.

IV) Si dirà *ampiezza* di una curva σ di Σ, cui competa il valore λ_0 di λ, l'estremo superiore di $\varphi(\theta, \lambda_0)$ fra 0 e 2π. L'ampiezza di σ è l'estremo inferiore dei raggi dei cerchi di centro O che contengono nel loro interno tutti i punti interni a σ.

V) Se il punto $P(a)$ è interno ad una curva σ del fascio Σ, la curva σ_P si dirà *interna* a σ; tutti i punti interni a σ_P, o situati su questa curva, sono interni a σ.

Infatti, detti rispettivamente λ' e λ'' i valori di λ corrispondenti a σ_P ed a σ, e indicato con P' il punto in cui σ è segata da OP, si ha

$$\begin{cases} OP = \varphi([a], \lambda') \\ OP' = \varphi([a], \lambda'') \end{cases}$$

da cui, essendo P interno a σ e quindi $OP < OP'$, ed essendo φ sempre crescente rispetto alla seconda variabile; si ha $\lambda'' < \lambda'$.

Sia ora $Q(b)$ un qualsiasi punto interno o situato su σ_P, e sia Q' il punto di sezione di OQ con σ, sarà

$$\begin{cases} OQ \leq \varphi([b], \lambda') \\ OQ' = \varphi([b], \lambda''), \end{cases}$$

il chè, per l'ineguaglianza $\lambda'' < \lambda'$ e per la proprietà di φ più sopra invocata, mostra che $OQ < OQ'$, e quindi che Q è interno a σ.

Si ha pure evidentemente che l'ampiezza di σ_P è minore di quella di σ.

VI) La condizione che un punto $Q(b)$ sia interno ad una curva $\sigma_{P(a)}$ del fascio Σ, può esprimersi con l'ineguaglianza

$$|b| < \varphi\{[b], \varphi_1([a], |a|)\}$$

cioè, più simmetricamente,

$$\varphi_1([b], |b|) < \varphi_1([a], |a|), \tag{6}$$

avendo osservato che se, in generale, f simboleggia una funzione sempre crescente $[$quale è $\varphi_1([b], x)]$, da $u < v$ può dedursi $f(u) < f(v)$.

Anche più semplicemente, introducendo l'operazione $\boldsymbol{\Gamma}$ definita da

$$\Gamma(z) = \varphi_1([z], |z|), \tag{7}$$

la (6) può scriversi

$$\Gamma(b) < \Gamma(a). \tag{8}$$

Premesse le precedenti considerazioni preliminari possiamo enunciare e dimostrare il teorema che forma l'oggetto della presente Nota:

Se la funzione $F(z)$ *si annulla per* $z = 0$, *ed è possibile determinare la funzione* φ, *che serve a definire il fascio* Σ, *in modo che in tutti i punti interni ad una curva* σ *di questo fascio* $F(z)$ ***sia continua*** [1] *e soddisfi alla condizione*

$$\Gamma F(z) < \Gamma(z); \tag{9}$$

per ogni z_0 *interno a* σ, *la successione*

$$z_0\,,\; z_1 = F(z_0)\,,\; z_2 = F(z_1)\,, \ldots$$

è convergente ed ha per limite lo zero.

Infatti, per le (8) e (9), se $P(a)$ è un punto interno a σ, $Q(F(a))$ sarà interno a σ_P epperò pure a σ, a cui σ_P è interna. Quindi, essendo $P(z_0)$ interno a σ, anche i punti $P(z_1)$, $P(z_2)$, ... saranno tutti interni a questa curva; epperò $P(z_{i+1})$ è sempre interno a σ_i, avendo indicato brevemente con questo simbolo la curva di Σ che passa pel punto $P(z_i)$.

Ne segue che ciascuna delle successive curve

$$\sigma_0\,,\, \sigma_1\,, \ldots\, \sigma_i\,,\, \sigma_{i+1}\,, \ldots$$

è interna alla precedente, epperò deve verificarsi uno dei seguenti due casi:

1°) Le ampiezze delle successive curve $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ tendono a zero.

2°) Esiste una curva *limite* σ', interna a tutte le curve σ_i e tale che, fissato ad arbitrio il numero positivo ε, è sempre possibile trovare un intero ν, tale che l'estremo superiore della differenza dei moduli di due qualunque numeri complessi i cui indici siano interni a σ, ma non a σ', sia minore di ε.

Dico che il 2° caso non può mai verificarsi.

[1] Alla condizione di continuità, che imponiamo per brevità, se ne può sostituire una meno restrittiva (ved. in proposito l'analoga osservazione nella mia Nota citata in principio).

Infatti, supposto che esso si verifichi, consideriamo due punti $P(z_n)$ e $P(z_{n+1})$, $(n > \nu)$ e chiamiamo $S(a_n)$ e $S(a_{n+1})$ i punti in cui σ' è incontrata rispettivamente dalle semirette $OP(z_n)$ e $OP(z_{n+1})$. Essendo evidentemente i punti $P(z_n)$, $P(z_{n+1})$, $S(a_n)$ e $S(a_{n+1})$ interni a σ e non interni a σ', potrà scriversi

$$|z_n| - |a_n| = |z_n - a_n| < \varepsilon. \tag{10}$$

$$|z_{n+1}| - |a_{n+1}| = |z_{n+1} - a_{n+1}| < \varepsilon. \tag{11}$$

Per la continuità di $F(z)$, dalla (10) si ha

$$|f(z_n) - f(a_n)| < \eta, \tag{12}$$

avendo indicato con η un opportuno numero positivo, che può rendersi piccolo a piacere impiccolendo sufficientemente ε. La (12) può scriversi

$$|z_{n+1} - f(a_n)| < \eta$$

da cui, sommando con la (11) ed applicando il teorema sul modulo di una somma,

$$|f(a_n) - a_{n+1}| < \varepsilon + \eta. \tag{13}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ ed indicando con $S(a)$ ed $S(a')$ due punti limiti, in generale diversi, del gruppo di punti di σ': $S(a_n)$, $S(a_{n+1})$, ..., la (13) fornisce

$$F(a) = a'; \tag{14}$$

d'altra parte, esprimendo che $S(a)$ e $S(a')$ sono su di una medesima curva (σ') del fascio Σ, si ha

$$\Gamma(a') = \Gamma(a); \tag{15}$$

dunque è

$$\Gamma F(a) = \Gamma(a). \tag{16}$$

Ma, essendo $S(a)$ un punto interno a σ, si deve avere per la (9)

$$\Gamma F(a) < \Gamma(a),$$

dunque il supporre che si verifichi il secondo caso conduce ad una contradizione.

Dovendo allora verificarsi necessariamente il 1° caso, dato ad arbitrio il numero positivo ε, potrà determinarsi un intero ν tale che per $n > \nu$ l'ampiezza di σ_{n-1} sia minore di ε, e quindi, essendo $P(z_n)$ un punto interno a σ_{n-1}, sia

$$|z_n| < \varepsilon,$$

il chè mostra che il limite della successione

$$z_0 \, , \, z_1 = \mathrm{F}(z_0) \, , \, z_2 = \mathrm{F}(z_1) \, , \ldots$$

esiste ed è lo zero, c. b. d.

Supponendo in particolare z reale si ha

$$\begin{cases} \Gamma(z) = \varphi_1(\pi \, , |z|) & , \quad z < 0 \\ \Gamma(z) = \varphi_1(0 \, , |z|) & , \quad z > 0 \, . \end{cases}$$

Com'è facile vedere, ne segue che, limitandosi a considerare i valori reali di z e supponendo che $\mathrm{F}(z)$ sia reale per z reale, la (9) equivale alle condizioni

$$(17) \qquad \begin{cases} z < \mathrm{F}(z) < \varphi\{0 \, , \varphi_1(\pi \, , |z|)\} & , \quad z < 0 \, , \\ -\varphi\{\pi \, , \varphi_1(0 \, , |z|)\} < \mathrm{F}(z) < z & , \quad z > 0 \, , \end{cases}$$

cioè

$$(18) \qquad \begin{cases} z < \mathrm{F}(z) < \Psi(|z|) & , \quad z < 0 \, , \\ -\Psi^{-1}(|z|) < \mathrm{F}(z) < z & , \quad z > 0 \, , \end{cases}$$

avendo posto

$$(19) \qquad \Psi(x) = \varphi\{0 \, . \, \varphi_1(\pi \, , x)\} \qquad x \geq 0 \, ,$$

e

$$(20) \qquad \Psi^{-1}(x) = \varphi\{\pi \, , \varphi_1(0 \, , x)\} \quad , \quad x \geq 0 \, ,$$

dopo aver osservato che si ha identicamente

$$\varphi\{\pi \, , \varphi_1(0 \, , \Psi(x))\} = x \, .$$

Osserviamo:

1°) che riguardando, nelle (19) e (20), $\Psi(x)$ come una funzione data, nulla per $x = 0$ e sempre crescente per x crescente, possono trovarsi infinite funzioni $\varphi(x \, , y)$ soddisfacenti a quelle equazioni;

2°) che se si pone

$$a = \varphi(\pi \, , x) \, ,$$

per la (20) si ha

$$\Psi(a) = \varphi(0 \, , x) \, .$$

In conseguenza dal teorema generale si deduce in particolare che:

Se la funzione reale $\mathrm{F}(z)$ *della variabile reale* z, *si annulla per* $z = 0$, *ed è possibile determinare una funzione* $\Psi(x)$, *nulla per* $x = 0$ *e sempre crescente per* x *crescente, in modo che in tutti i punti di un intervallo*

$$\mathrm{I} \equiv [-a \, , \Psi(a)] \quad , \quad a > 0$$

la F(z) *sia continua e siano verificate le condizioni*

$$\begin{cases} z < F(z) < \Psi(|z|) & , \quad z < 0 , \\ -\Psi^{-1}(|z|) < F(z) < z & , \quad z > 0 ; \end{cases}$$

per ogni z_0 *interno ad* I, *la successione*

$$z_0 \, , \, z_1 = F(z_0) \, , \, z_2 = F(z_1) \, , \ldots$$

è convergente ed ha per limite lo zero.

Questo è il teorema sull'iterazione di una funzione di una variabile reale contenuto nella Nota di Andreoli citata in principio. Supponendo più particolarmente che sia

$$\Psi(x) = mx \quad , \quad m > 0 \, ,$$

si ottiene l'analogo teorema contenuto nella mia Nota più volte citata, o meglio quello che diventa quel teorema quando si suppone nullo un numero X che in esso compare (ipotesi non restrittiva).

Fisica. — *Su la polarizzazione detta reticolare.* II. *Su alcuni fenomeni ottici presentati dalle valve striate delle Diatomee.* II Nota preliminare di A. Pochettino, presentata dal Socio P. Blaserna [1].

In una importante Memoria su la polarizzazione parziale che subisce la luce passando attraverso fenditure sottili, Fizeau [2] dice di aver trovato *sempre* (almeno finchè la larghezza de le fenditure è maggiore di 1 μ) una polarizzazione *perpendicolare* ai bordi tanto per quelle a bordi metallici quanto per quelle a bordi di vetro. Du Bois [3], in una ricerca molto più recente, trova invece che i reticoli *scalfiti su vetro* polarizzano la luce *parallelamente* ai bordi, mentre Franz Braun [4], più recentemente ancora, non trova alcun effetto nei reticoli di fili di quarzo. In un mio studio [5] su questo argomento io ho, al contrario, potuto confermare le antiche osservazioni di Fizeau.

Riguardo ai risultati contradittorî delle osservazioni del Braun e del Du Bois, è da notare che tanto i fili di quarzo quanto i bordi delle scalfitture su vetro presentano ordinariamente una certa birifrangenza irregolar-

[1] Pervenuta all'Accademia il 1° agosto 1916.
[2] Ann. de Chim. et Phys. (3), 63, pag. 385 (1861).
[3] Wied. Ann., *46*, pag. 559 (1892).
[4] Dissertazione, Berlino (1896).
[5] Rend. Acc. Lincei, 1916.