ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Matematica. — *Sopra un'interpretazione geometrica dei sistemi commutativi di numeri a più unità.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

1. In alcune ricerche di geometria infinitesimale ordinaria, e in generale ad un numero qualunque n di dimensioni, si presenta il problema di determinare tutte le forme differenziali quadratiche in n variabili $x_1, x_2, \dots x_n$

$$ds^2 = \sum_{i,k}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{1}$$

che soddisfano alle condizioni seguenti:

a) *la forma* (1) *sia a curvatura Riemanniana nulla, cioè sia riducibile al tipo normale del* ds^2 *euclideo*

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2\,; \tag{2}$$

b) *i valori dei simboli a tre indici* $\left\{ {ik \atop s} \right\}$ [2] *di seconda specie, calcolati per la forma* (1), *siano tutti costanti.*

Il problema, affrontato direttamente, conduce ad un sistema di equazioni a derivate parziali del secondo ordine per le n funzioni incognite y_i delle variabili indipendenti x_i, ed appare di difficile soluzione. Dimostrerò nella

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 settembre 1916.

(2) Ved. il Cap. II delle *Lezioni di geometria differenziale* (vol. I).

presente Nota che esso si collega, in modo singolare, con la teoria dei sistemi *commutativi* di numeri ad n unità irriducibili $(e_1, e_2, \ldots e_n)$, e da questa riceve la sua soluzione completa, eccettuati alcuni casi particolari di cui si dirà più oltre.

Ad ogni tale sistema commutativo di numeri $(e_1, e_2, \ldots e_n)$ corrispondono in effetto infinite forme differenziali soddisfacenti alle condizioni enunciate a) e b), precisamente ne corrispondono $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$, e le relative espressioni dei coefficienti a_{ik} in funzione delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ si trovano *senza alcuna integrazione*. Medesimamente per ciascuna di queste forme la riduzione al tipo normale (2) richiede soltanto operazioni algebriche. L'algoritmo dei sistemi (commutativi) di numeri complessi superiori riceve così un nuovo significato che sembra degno di attenzione. Essendo ben noti per esempio tutti i sistemi di numeri a *2* ed a *3* unità, si possono subito scrivere (ved. n. 7) le possibili forme corrispondenti del ds^2 del piano e dello spazio con valori costanti pei simboli $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ di Christoffel.

2. Cominciamo da una ricerca più generale e domandiamo come, date in funzione delle x le espressioni

$$\gamma_{iks} = \left\{ {ik \atop s} \right\}$$

dei simboli di Christoffel per una qualsiasi forma differenziale (1), si possano calcolare i coefficienti a_{ik}. Bene inteso che, per le proprietà dei detti simboli, le espressioni date γ_{iks} non debbono cangiare permutando i due primi indici, cioè si deve supporre

$$\gamma_{iks} = \gamma_{kis}. \tag{3}$$

Le formole al § 31 (19*) del mio libro citato dimostrano che le funzioni a_{ik} delle x dovranno soddisfare al seguente sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \sum_\lambda^{1\ldots n} \gamma_{il\lambda}\, a_{k\lambda} + \sum_\lambda^{1\ldots n} \gamma_{kl\lambda}\, a_{i\lambda} \tag{I}$$
$$(i, k, l = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Ma anche viceversa, se le a_{ik} soddisfano le (I), ed è diverso da zero il determinante $A = |a_{ik}|$, il valore del simbolo $\left\{ {ik \atop s} \right\}$ per la forma differenziale (1) sarà dato da γ_{iks}. E infatti, se formiamo dapprima dalle (I) il valore del simbolo di *prima specie* $\left[{ik \atop l} \right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \right)$, troviamo

$$\left[{ik \atop l} \right] = \sum_\lambda^{1\ldots n} \gamma_{ik\lambda}\, a_{l\lambda},$$

e per ciò [1]

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \mathrm{A}_{ls} \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \gamma_{ik\lambda} \sum_{l}^{1\ldots n} \mathrm{A}_{ls}\, a_{l\lambda} = \sum_{\lambda}^{1\ldots n} \varepsilon_{s\lambda}\, \gamma_{ik\lambda} = \gamma_{iks}\,, \quad \text{c. d. d.}$$

Ma, in generale, se le γ_{iks} sono date comunque in funzione delle x, il sistema differenziale (I) non avrà soluzioni. Per esaminare la cosa più da vicino, occorre formare le condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right) = 0\,,$$

che si calcolano subito nelle seguenti:

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\lambda}^{1\ldots n}\left\{\frac{\partial \gamma_{il\lambda}}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{ij\lambda}}{\partial x_l} + \sum_{s}^{1\ldots n}(\gamma_{ils}\,\gamma_{sj\lambda} - \gamma_{ijs}\,\gamma_{sl\lambda})\right\} a_{k\lambda} + \\ &+\sum_{\lambda}^{1\ldots n}\left\{\frac{\partial \gamma_{kl\lambda}}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{kj\lambda}}{\partial x_l} + \sum_{s}^{1\ldots n}(\gamma_{kls}\,\gamma_{sj\lambda} - \gamma_{kjs}\,\gamma_{sl\lambda})\right\} a_{ik} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Queste, *ove non siano identità*, dànno luogo ad un certo numero di equazioni lineari omogenee nelle a_{ik}, mediante le quali altrettante delle a_{ik} potranno eliminarsi dalle (I). E così continuando, come insegna la teoria generale, si perverrà a riconoscere se le (I) sono compatibili, e quale grado di arbitrarietà (quante costanti arbitrarie) possiede la soluzione completa.

3. Il caso che a noi più interessa è quello appunto in cui le condizioni d'integrabilità (4) si trovano *identicamente* soddisfatte, sussistendo per tutti i valori degli indici le relazioni

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{\partial \gamma_{il\lambda}}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{ij\lambda}}{\partial x_l} + \sum_{s}^{1\ldots n}(\gamma_{ils}\,\gamma_{sj\lambda} - \gamma_{ijs}\,\gamma_{sl\lambda}) = 0\,.$$

$$(i\,,\lambda\,,l\,,j\,,=1\,,2\,,3\,,\ldots n)\,.$$

In questo caso il sistema (I) è *completamente* integrabile, e la sua soluzione generale contiene, linearmente ed omogeneamente, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie. Ora, per ogni soluzione (a_{ik}) delle (I), i valori corrispondenti dei simboli $\begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix}$ eguagliano, come si è visto, le espressioni date γ_{iks}, ed il primo membro delle (A) coincide col valore del simbolo a quattro indici e di seconda specie (*Lezioni*, § 34)

$$\{i\lambda\,,lj\}\,.$$

[1] Ricordiamo che A_{ls} ha il significato $\mathrm{A}_{ls} = \dfrac{\partial \log \mathrm{A}}{\partial a_{ls}}$ $(\mathrm{A} = |a_{ik}|)$ ed $\varepsilon_{s\lambda}$ rappresenta *0* per $s = \lambda$, e *1* per $s = \lambda$.

Il verificarsi delle (A) esprime adunque che sono nulli i valori di tutti questi simboli, e per ciò anche dei simboli di Riemann (ik, lj). La forma differenziale (I) risulta adunque a curvatura Riemanniana nulla; e viceversa, se questo accade, le (A) sono altrettante identità, onde concludiamo:

Il sistema differenziale (I) *è completamente integrabile nel solo caso delle forme differenziali a curvatura nulla.*

Possiamo presentare questo risultato sotto altra forma, dicendo che ogni forma differenziale a curvatura nulla

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{5}$$

ne determina $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ altre

$$ds'^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n} a'_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \tag{5'}$$

che hanno a comune con la prima i valori dei simboli $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ di Christoffel. Fissate due di queste forme (5), (5′), si possono riguardare come esprimenti i quadrati ds^2, ds'^2 degli elementi lineari di due spazii euclidei S_n, S'_n, e ne risulta una rappresentazione dell'uno spazio sull'altro (o dello spazio euclideo sopra sè stesso), ove si riguardano come corrispondenti i punti dati dagli stessi valori delle variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$. È facile vedere che: *queste rappresentazioni conservano la proporzionalità dei volumi* (meglio degli ipervolumi per $n > 3$, delle aree per $n = 2$). E infatti se A, A' sono i due discriminanti delle forme (5), (5′), si ha per note formole (*Lezioni*, vol. I, pag. 65)

$$\frac{\partial \log A}{\partial x_l} = \frac{\partial \log A'}{\partial x_l} = 2 \sum_{i}^{1\ldots n} \left\{ {il \atop i} \right\},$$

onde segue che A' differisce da A per un fattore costante di proporzionalità.

4. Lasciamo queste generalità e veniamo ora all'oggetto nostro speciale, cioè: *alla ricerca delle forme differenziali* (1) *a curvatura nulla, con valori costanti* γ_{iks} *pei simboli* $\left\{ {ik \atop s} \right\}$.

In tal caso le (A) diventano $\sum_s^{1\ldots n} \gamma_{ils}\gamma_{sj\lambda} = \sum_s^{1\ldots n} \gamma_{ijs}\gamma_{sl\lambda}$, ovvero, permutando gli indici di sommazione i, l, col tener presente la (3):

$$\sum_s^{1\ldots n} \gamma_{ils}\gamma_{sj\lambda} = \sum_s^{1\ldots n} \gamma_{ljs}\gamma_{si\lambda} \quad (i, \lambda, j, l = 1, 2, 3, \ldots n)\,. \tag{B}$$

Per quanto precede, queste (B) esprimono le condizioni *necessarie e sufficienti* affinchè le costanti γ_{iks} appartengano, come valori dei simboli

$\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ s \end{matrix} \right\}$, ad una e quindi (n. 3) ad $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme differenziali (1) a curvatura nulla.

Ma le stesse condizioni (B), insieme ad una condizione complementare di cui ora diremo, stanno appunto alla base della teoria dei sistemi commutativi di numeri ad n unità irriducibili $(e_1, e_2, \ldots e_n)$, come qui brevemente rammentiamo [1]. Ogni numero x del sistema ha la forma

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = \sum_i^{1\ldots n} x_i e_i\,, \tag{6}$$

ove $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentano numeri ordinarii. Definita l'addizione secondo le leggi formali ordinarie, si definisce la moltiplicazione assegnando le formole elementari di moltiplicazione

$$e_i e_k = e_k e_i = \sum_i^{1\ldots n} \gamma_{iks}\, e_s\,, \tag{7}$$

dove le γ_{iks} sono costanti assegnate. Il prodotto del numero $x = \sum_i^{1\ldots n} x_i e_i$ per un altro $y = \sum_l^{1\ldots n} x_l e_l$ è allora

$$xy = yx = \sum_s^{1\ldots n} e_s \sum_s^{1\ldots n} \gamma_{ils}\, x_i y_l\,.$$

Le costanti γ_{iks} si assoggettano in primo luogo alle condizioni necessarie affinchè, nel sistema di numeri, valga per la moltiplicazione anche la legge *associativa* $(xy)z = x(yz)$, e questo porta appunto alle (B), perchè supposto $z = \sum^{1\ldots n} z_j e_j$, ne viene

$$(xy)z = \sum_\lambda^{1\ldots n} e_\lambda \sum_{iljs}^{1\ldots n} \gamma_{ils}\, \gamma_{sj\lambda}\, x_i\, y_l\, z_j$$

$$x(yz) = \sum_\lambda^{1\ldots n} e_\lambda \sum_{iljs}^{1\ldots n} \gamma_{ljs}\, \gamma_{si\lambda}\, x_i\, y_l\, z_j\,.$$

Ma qui, in secondo luogo, volendo che l'operazione inversa della moltiplicazione, *la divisione*, sia in generale effettuabile, bisogna aggiungere alle (B) l'altra condizione complementare (cui sopra si è alluso) che il determinante $\Delta = |\beta_{ks}|$ formato cogli elementi

$$\beta_{ks} = \sum_i^{1\ldots n} \gamma_{iks}\, x_i$$

[1] Ved. p. es. Lie-Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*, Kap. 21 (Leipzig, Teubner, 1893).

non sia *identicamente* nullo nelle x_i, riguardate come variabili indipendenti. Che quest'ultima condizione non sia una conseguenza delle (B) è manifesto, poichè p. es. se si prendono nulle tutte le γ_{iks} si soddisfano le (B), ma insieme si annulla anche Δ.

5. Ritornando al nostro problema delle forme differenziali (1) a curvatura nulla, e con valori costanti γ_{iks} pei simboli $\left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\}$, diremo per brevità *singolare* una tale forma quando per quei valori γ_{iks} sia identicamente nullo il determinante Δ. Lasciando da parte queste eventuali forme singolari, possiamo concludere intanto: *Ad ogni forma differenziale quadratica in n variabili a curvatura nulla, e con valori costanti γ_{iks} pei simboli $\left\{ \begin{matrix} i k \\ s \end{matrix} \right\}$, che non sia singolare, corrisponde un sistema commutativo di numeri ad n unità; viceversa ad ogni tale sistema commutativo corrispondono $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme differenziali* (1) *dotate delle proprietà volute.*

Supposto ora assegnato il sistema commutativo di numeri $(e_1, e_2, \dots e_n)$, domandiamo: *come si trovano le $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme differenziali corrispondenti?* Il problema consiste nell'integrazione del sistema (I), completamente integrabile, di equazioni ai differenziali totali; ma, poichè questo sistema è lineare omogeneo *a coefficienti costanti*, si riduce subito ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie lineari ed a coefficienti costanti, e bastano operazioni algebriche (la risoluzione della relativa equazione caratteristica) per compiere l'integrazione. Abbiamo dunque il risultato:

Le $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ forme differenziali quadratiche, soddisfacenti alle condizioni a) b) *del n. 1, che corrispondono ad un dato sistema commutativo di numeri $(e_1, e_2, \dots e_n)$ si trovano senza alcuna integrazione.*

È manifesto che quest'ultimo risultato vale anche per le eventuali forme singolari, assegnati che siano i valori delle costanti γ_{iks}, compatibilmente con le (B).

6. Ora dobbiamo ricordare che un sistema di numeri $(e_1 \cdot e_2, \dots e_n)$ può ricevere infinite forme equivalenti (che si computano dello stesso *tipo*), e ciò cangiando le unità fondamentali $e_1, e_2, \dots e_n$ in altre $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots \overline{e}_n$ del sistema, secondo una sostituzione lineare ed omogenea

$$\overline{e}_i = \sum_r^{1\dots n} c_{ir}\, e_r\,, \tag{8}$$

dove le c_{ir} sono costanti qualunque, così però che il modulo o determinante $|c_{ir}|$ della sostituzione sia diverso da zero. Con questo mutamento delle unità fondamentali, restano anche cambiate le costanti γ_{iks} in altre nuove $\overline{\gamma}_{iks}$, che si calcolano subito dalle conseguenti relazioni lineari

$$\sum_\lambda^{1\dots n} \overline{\gamma}_{ik\lambda}\, c_{\lambda\mu} = \sum_{r,s}^{1\dots n} \gamma_{rs\mu}\, c_{ir}\, c_{ks} \qquad (i, k, \dots \mu = 1, 2, \dots n). \tag{9}$$

Queste, tenendo fissi i, k, dànno per $\overline{\gamma}_{ik1}, \overline{\gamma}_{ik2}, \ldots \overline{\gamma}_{ikn}$ n equazioni lineari con determinante $|c_{\lambda\mu}| \neq 0$ e si risolvono immediatamente.

Dopo ciò, è ben naturale domandare: *quale significato ha per le corrispondenti forme differenziali quadratiche questo cambiamento di unità?* Per vederlo eseguiamo, sulle variabili x di una delle nostre forme differenziali, sia $ds^2 = \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, la sostituzione lineare intera

$$x_i = \sum_r^{1\ldots n} c_{ri}\, \overline{x}_r + c_i\,, \tag{10}$$

dove le c_{ri} sono le costanti stesse che già figurano nella sostituzione (trasposta) (8), e le $c_1, c_2, \ldots c_n$ indicano nuove costanti arbitrarie. Supponiamo che, per questa sostituzione (10), la forma data si cangi nell'altra $\sum_{ik}^{1\ldots n} \overline{a}_{ik}\, d\overline{x}_i\, d\overline{x}_k$, e indichiamo con un soprassegno $\overline{\begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix}}$ i nuovi valori dei simboli di Christoffel. Applichiamo allora le formole fondamentali di Christoffel per l'equivalenza di due forme quadratiche [ved. *Lezioni*, § 30, formole (II)]:

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial \overline{x}_r\, \partial \overline{x}_s} = \sum_\mu^{1\ldots n} \overline{\begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix}} \frac{\partial x_\nu}{\partial \overline{x}_\mu} - \sum_{ik}^{1\ldots n} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} \frac{\partial x_k}{\partial \overline{x}_s}\,,$$

e siccome qui, a causa delle (10),

$$\frac{\partial x_i}{\partial \overline{x}_r} = c_{ri} \quad , \quad \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial \overline{x}_r\, \partial \overline{x}_s} = 0\,,$$

ne verrà

$$\sum_\mu^{1\ldots n} \overline{\begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix}} c_{\mu\nu} = \sum_{i,k}^{1\ldots n} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} c_{ri}\, c_{sk}\,,$$

che, mutando le notazioni degli indici, scriviamo

$$\sum_\lambda^{1\ldots n} \begin{Bmatrix} ik \\ \lambda \end{Bmatrix} c_{\lambda\mu} = \sum_{r,s}^{1\ldots n} \overline{\begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix}} c_{ir}\, c_{ks}\,.$$

Se si confrontano queste formole con le (9), ricordando che $\begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix} = \gamma_{rs\mu}$, se ne deduce subito $\overline{\begin{Bmatrix} ik \\ \lambda \end{Bmatrix}} = \overline{\gamma}_{ik\lambda}$, e si vede quindi che: *il cangiamento delle unità corrisponde al passaggio dalla prima forma differenziale* $\sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ *alla equivalente* $\sum_{ik}^{1\ldots n} \overline{a}_{ik}\, d\overline{x}_i\, d\overline{x}_k$, *mediante la sostituzione lineare intera* (10) *eseguita sulle variabili.*

Si conclude che basta, per ogni sistema commutativo di numeri, fissare una determinata forma come normale e calcolare, secondo il n. 5 le forme differenziali corrispondenti; dopo di che, operando sulle variabili di una tale forma la più generale sostituzione lineare intera (10), si avranno tutte le altre forme differenziali appartenenti al medesimo tipo.

7. Se applichiamo questi risultati generali ai casi $n=2$ e $n=3$, troveremo le forme (non singolari) del ds^2 del piano e dello spazio ordinario con valori costanti pei simboli $\left\{ {ik \atop s} \right\}$ di Christoffel. Per questo ricorriamo alle tabelle date al § 4, Kap. 21 del citato libro di Lie-Scheffers.

Caso $n=2$. Esistono due soli tipi di sistemi di numeri a due unità (e_1, e_2), *ambedue commutativi*, e definiti dalle rispettive formole di moltiplicazione elementare

$$\text{Tipo I)} \quad e_1^2 = 0 \quad , \quad e_2^2 = \quad e_2 \quad , \quad e_1 e_2 = e_1$$

$$\text{Tipo II)} \quad e_1^2 = e_1 \quad , \quad e_2^2 = - e_1 \quad , \quad e_1 e_2 = e_2 \, ,$$

ove il rappresentante del secondo tipo è stato scelto in guisa da corrispondere agli ordinarii numeri complessi. I corrispondenti valori dei simboli di Christoffel sono quindi:

$$\text{Tipo I)} \quad \left\{ {11 \atop 1} \right\} = 0 \, , \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0 \, ; \left\{ {22 \atop 1} \right\} = 0 \quad , \left\{ {22 \atop 2} \right\} = 1 \, ; \left\{ {12 \atop 1} \right\} = 1 \, , \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 0$$

$$\text{Tipo II)} \quad \left\{ {11 \atop 1} \right\} = 1 \, , \left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0 \, ; \left\{ {22 \atop 1} \right\} = -1 \, , \left\{ {22 \atop 2} \right\} = 0 \, ; \left\{ {12 \atop 1} \right\} = 0 \, , \left\{ {12 \atop 2} \right\} = 1 \, ,$$

e, integrando (n. 5) le relative equazioni (I), troviamo pei coefficienti della forma differenziale

$$ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + 2a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2$$

le espressioni seguenti:

$$\text{Tipo I)} \quad a_{11} = a e^{2x_2} \, , \; a_{12} = (a x_1 + b)\, e^{2x_2} \, . \; a_{22} = (a x_1^2 + 2 b x_1 + c)\, e^{2x_2}$$

$$\text{Tipo II)} \quad a_{11} = (a + b \operatorname{sen} 2x_2 + c \cos 2x_2)\, e^{2x_1} \, ,$$

$$a_{12} = (b \cos 2x_2 - c \operatorname{sen} 2x_2)\, e^{2x_1} \, , \; a_{22} = (a = b \operatorname{sen} 2x_2 - c \cos 2x_2)\, e^{2x_1} \, .$$

Ambedue le volte a, b, c indicano tre costanti arbitrarie, solo che nel primo caso deve essere $ac - b^2 \neq 0$, nel secondo $a^2 - b^2 - c^2 \neq 0$, affinchè non si annulli il discriminante della forma.

Caso $n=3$. Esistono cinque tipi diversi di sistemi di numeri a tre unità, dei quali però uno, perchè non commutativo, non entra in considerazione nel caso nostro. Gli altri quattro (commutativi) sono contrassegnati dalle rispettive formole elementari di moltiplicazione:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Tipo I)} & e_1^2 = 0 \,,\; e_2^2 = 0 \,,\; e_3^2 = e_3 \,,\; e_1 e_2 = 0 \,,\; e_1 e_3 = e_1 \,,\; e_2 e_3 = e_2 \\
\text{Tipo II)} & e_1^2 = 0 \,,\; e_2^2 = e_1 \,,\; e_3^2 = e_3 \,,\; e_1 e_2 = 0 \,,\; e_1 e_3 = e_1 \,,\; e_2 e_3 = e_2 \\
\text{Tipo III)} & e_1^2 = e_1 \,,\; e_2^2 = 0 \,,\; e_3^2 = e_3 \,,\; e_1 e_2 = 0 \,,\; e_1 e_3 = 0 \,,\; e_2 e_3 = e_2 \\
\text{Tipo IV)} & e_1^2 = e_1 \,,\; e_2^2 = e_2 \,,\; e_3^2 = e_3 \,,\; e_1 e_2 = 0 \,,\; e_1 e_3 = 0 \,,\; e_2 e_3 = 0 \,.
\end{array}
$$

Tenendo conto dei corrispondenti valori dei simboli $\left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\}$, il calcolo dei 6 coefficienti a_{ik} nella forma differenziale ternaria:

$$ds^2 = a_{11} dx_1^2 + a_{22} dx_2^2 + a_{33} dx_3^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + 2a_{13} dx_1 dx_3 + 2a_{23} dx_2 dx_3$$

si fa come si è visto al n. 5, e si trovano le espressioni seguenti:

$$
\text{Tipo I)} \left\{ \begin{array}{l}
a_{11} = a e^{2x_3} \,,\; a_{22} = c e^{2x_3} \,,\; a_{33} = (a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 + 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \gamma) e^{2x_3} \\
a_{12} = b e^{2x_3} \,,\; a_{13} = (a x_1 + b x_2 + \alpha) e^{2x_3} \,,\; a_{23} = (b x_1 + c x_2 + \beta) e^{2x_3}
\end{array} \right.
$$

$$
\text{Tipo II)} \left\{ \begin{array}{l}
a_{11} = a e^{2x_3} \,,\; a_{22} = (a x_2^2 + 2b x_2 + c) e^{2x_3} \,, \\
a_{33} = \left\{ a x_1^2 + a x_1 x_2^2 + 2b x_1 x_2 + 2\alpha x_1 + a \dfrac{x_2^4}{4} + b x_2^3 + (\alpha + c) x_2^2 + 2\beta x_2 + \gamma \right\} e^{2x_3} \\
a_{12} = (a x_2 + b) e^{2x_3} \,,\; a_{13} = \left(a x_1 + \dfrac{a x_2^2}{2} + b x_2 + \alpha \right) e^{2x_3} \,, \\
a_{23} = \left\{ a x_1 x_2 + \dfrac{a x_1^3}{2} + \dfrac{3b x_2^2}{2} + (\alpha + c) x_2 + \beta \right\} e^{2x_3}
\end{array} \right.
$$

$$
\text{Tipo III)} \left\{ \begin{array}{l}
a_{11} = a e^{2x_3} \,,\; a_{22} = c e^{2x_3} \,,\; a_{33} = (c x_2^2 + 2\beta x_2 + \gamma) e^{2x_3} \\
a_{12} = b e^{x_1 + x_3} \,,\; a_{13} = (b x_2 + \alpha) e^{2x_3} \,,\; a_{23} = (c x_2 + \beta) e^{2x_3}
\end{array} \right.
$$

$$
\text{Tipo IV)} \left\{ \begin{array}{l}
a_{11} = a e^{2x_1} \,,\; a_{22} = c e^{2x_2} \,,\; a_{33} = \gamma e^{2x_3} \\
a_{12} = b e^{x_1 + x_2} \,,\; a_{13} = \alpha e^{x_1 + x_3} \,,\; a_{23} = \beta e^{x_2 + x_3} \,.
\end{array} \right.
$$

In tutte queste formole $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ indicano 6 costanti arbitrarie, soggette alla sola condizione che sia diverso da zero il determinante $\begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$, dal quale il discriminante della forma non differisce che per un fattore esponenziale.

Tutte le forme differenziali (non singolari) pel ds^2 del piano e dello spazio, con valori costanti pei simboli $\left\{ \begin{matrix} ik \\ s \end{matrix} \right\}$, si ottengono da quelle scritte nel presente numero effettuando sulle variabili la più generale sostituzione lineare intera (n. 6).

8. Ritorniamo al caso generale di n qualunque, e supponiamo di conoscere una delle nostre forme differenziali $ds^2 = \sum_{ik}^{1 \dots n} a_{ik} \, dx_i \, dx_k$ (singolari o no),

a curvatura nulla e con valori costanti γ_{iks} pei simboli $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ s \end{matrix} \right\}$. Sappiamo che la forma è riducibile al tipo normale: $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$, e resta che vediamo quali sono le operazioni necessarie per effettuare questa riduzione.

Cominciamo dal dimostrare che *senza alcuna integrazione* si possono calcolare le $\frac{n(n+1)}{2}$ trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo continuo $G_{\frac{n(n+1)}{2}}$ delle trasformazioni della forma in sè, ovvero, in linguaggio geometrico, del gruppo dei movimenti dello spazio S_n euclideo. Se si indica con $Xf = \sum_i^{1\dots n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ una di queste trasformazioni infinitesime, le condizioni pei coefficienti ξ_i consistono nelle *equazioni di Killing*

$$\sum_r^{1\dots n} \left\{ \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right\} = 0,$$

alle quali val meglio qui dare un'altra forma equivalente, cangiando le funzioni incognite ξ_i nelle altre η_i date da

$$\eta_i = \sum_r^{1\dots n} a_{ir}\, \xi_r, \tag{11}$$

per le quali η esprimiamo inversamente le ξ con le formole

$$\xi_i = \sum_r^{1\dots n} A_{ir}\, \eta_r; \tag{11*}$$

allora le equazioni di Killing si scrivono sotto l'altra forma

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} = 2 \sum_\lambda^{1\dots n} \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\} \eta_\lambda. \tag{12}$$

Siccome nel caso nostro i valori $\gamma_{ik\lambda} = \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ \lambda \end{matrix} \right\}$ sono costanti, associando alle (12) quelle che se ne ottengono per derivazione, si ottiene il sistema seguente:

$$(C) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} = 2 \sum_\lambda^{1\dots n} \gamma_{ik\lambda}\, \eta_\lambda \\ & \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_\lambda^{1\dots n} \left(\gamma_{ik\lambda} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial x_l} + \gamma_{il\lambda} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial x_k} - \gamma_{kl\lambda} \frac{\partial \eta_\lambda}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \right.$$

che equivale alle *equazioni di definizione* del gruppo, secondo Lie. Rispetto alle $n(n+1)$ funzioni incognite η_i, $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}$ il sistema (C) è un sistema *com-*

pleto misto ai differenziali totali, nel quale le prime (C) sono $\frac{n(n+1)}{2}$ relazioni (lineari) finite fra le dette funzioni. Ora il sistema (C) è lineare omogeneo *con coefficienti costanti*, e per la stessa ragione addotta al n. 5, se ne avranno con sole operazioni algebriche gli integrali generali η_i contenenti, linearmente ed omogeneamente, $\frac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie. Così calcoleremo in effetto, senza alcuna integrazione, le $r=\frac{n(n+1)}{2}$ trasformazioni infinitesime

$$(13)\qquad X_1 f\,,\ X_2 f\,, \dots X_r f \qquad \left(r=\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

generatrici del gruppo G_r di movimenti.

9. Ottenuto questo primo risultato, arriviamo rapidamente al nostro scopo, isolando innanzi tutto fra i movimenti Xf le *traslazioni infinitesime*, che sappiamo essere in numero di n indipendenti, diciamo

$$(14)\qquad Z_k f=\sum_i^{1\dots n} \zeta_i^{(k)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1\,,2\,,\dots n)\,.$$

Per questo basta fare, rispetto ad un punto qualunque $(x_i^{(0)})$ fisso sullo spazio, la *distribuzione canonica* delle r trasformazioni infinitesime (13), a seconda dei loro ordini, ciò che si ottiene con semplice risoluzione di sistemi lineari; ed allora avremo n trasformazioni d'ordine zero, che saranno precisamente le traslazioni cercate (14), e le residue $\frac{n(n-1)}{2}$ daranno le rotazioni infinitesime attorno al punto.

Calcolate così le $Z_k f$, osserviamo che queste non sono legate fra loro da alcuna relazione lineare a coefficienti costanti o variabili (il determinante delle $\zeta_i^{(k)}$ è diverso da zero); inoltre esse soddisfano alle relazioni di composizione $(Z_k\,, Z_l)\,f=0$ e generano il gruppo Abeliano G_n delle traslazioni. Applichiamo ora i teoremi generali di Lie sull'integrazione dei *sistemi completi*, che ammettono note trasformazioni infinitesime.

Osserviamo p. es. che le $n-1$ equazioni simultanee a derivate parziali

$$(15)\qquad Z_2 f=0\,,\ Z_3 f=0\,, \dots Z_n f=0$$

formano un sistema completo (Jacobiano), che ammette la trasformazione infinitesima $Z_1 f$. Esiste per ciò *una* soluzione del sistema (15) [*invariante* del gruppo $G_{n-1}\equiv(Z_2 f\,, Z_3 f\,, \dots Z_n f)$], e detta u una tale soluzione, risulta $Z_1 u$ una funzione della u *non nulla*. Possiamo quindi *normalizzare* la u in una soluzione u_1 tale che sia $Z_1 u_1=1$, e dalle n condizioni compatibili

$$Z_1 u_1=1\,,\ Z_2 u_1=0\,, \dots Z_n u_1=0\,,$$

essendo $|\zeta_i^{(k)}| \neq 0$, si traggono tutte le derivate $\frac{\partial u_1}{\partial x_k}$, per ciò si avrà u_1 con una quadratura. In generale *con n quadrature* determineremo n funzioni $u_1, u_2, \dots u_n$ delle x tali che si abbia

$$Z_k u_i = \varepsilon_{ki}, \tag{16}$$

e queste n funzioni fra loro necessariamente indipendenti, perchè dalle (16) risulta $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)} \neq 0$, potranno essere assunte come nuove variabili. In queste variabili u la $Z_k f$ diventa, a causa delle (16),

$$Z_k f = \sum_i^{1\dots n} \frac{\partial f}{\partial u_i} Z_k u_i = \frac{\partial f}{\partial u_k},$$

e corrispondentemente la nostra forma differenziale si trasformerà nella nuova $\sum_{ik}^{1\dots n} b_{ik}\, du_i\, du_k$, *coi coefficienti b_{ik} costanti*, come risulta p. es. dalle equazioni di Killing, la forma ammettendo qui le trasformazioni infinitesime $\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial u_n}\right)$. Così abbiamo il ds^2 dello spazio ridotto, come si voleva, in coordinate cartesiane, che risulteranno in generale oblique, e potranno subito trasformarsi in ortogonali. Volendo ottenere il ds^2 già sotto forma ortogonale, basterebbe del resto cangiare le $Z_k f$ in n loro combinazioni indipendenti che rappresentino n traslazioni secondo le direzioni di una n^{pla} ortogonale, per modo che le nuove $Z_k f$ soddisferanno alle condizioni $\sum_{ik} a_{ik}\, \zeta_i^{(r)} \zeta_k^{(s)} = 0$ per $r \neq s$.

Con questo primo metodo la riduzione della nostra forma differenziale $ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$, a curvatura nulla, e con valori costanti pei simboli $\left\{ {ik \atop l} \right\}$, al tipo normale $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$ si effettua *con n quadrature*.

10. Un secondo metodo, che ora passiamo ad esporre, ci permette di arrivare più brevemente allo scopo e di risparmiare le quadrature. Per questo ricordiamo che, ogni qualvolta la forma differenziale

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1\dots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è a curvatura nulla, formano un sistema completamente integrabile le $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni del secondo ordine (ved. *Lezioni*, vol. I, § 185)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_k} = \sum_\lambda^{1\dots n} \left\{ {ik \atop \lambda} \right\} \frac{\partial U}{\partial x_\lambda} \qquad (i, k = 1, 2, \dots n), \tag{17}$$

e la soluzione generale U contiene, linearmente ed omogeneamente, $n+1$ costanti arbitrarie, i valori iniziali della U e delle sue n derivate prime. Nel caso nostro le (17) sono a coefficienti $\left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}$ *costanti*, e però l'integrazione si effettua *con sole operazioni algebriche.* D'altra parte se U, V sono due qualunque soluzioni delle (17), si ha (*Lezioni*, loc. cit.)

$$\nabla(\mathrm{U}, \mathrm{V}) = \mathrm{cost}\,, \quad \text{in particolare} \quad \Delta_1 \mathrm{U} = \mathrm{cost}.$$

Prendiamo allora n soluzioni particolari $y_1, y_2, \ldots y_n$ delle (17), disponendo dei valori iniziali per modo che si abbia

$$(18) \qquad \Delta_1 y_i = 1 \quad , \quad \nabla(y_i, y_k) = \varepsilon_{ik}\,.$$

Queste n funzioni $y_1, y_2, \ldots y_n$ sono fra loro indipendenti [1], ed assumendole a nuove variabili la forma differenziale si riduce al tipo normale: $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$, a causa appunto delle (18).

Concludiamo dunque: *Data una forma differenziale in n variabili a curvatura nulla, e con valori costanti pei simboli di Christoffel, la sua riduzione al tipo normale*

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$$

si effettua con sole operazioni algebriche.

Per mostrare in un esempio l'applicazione di questi risultati generali, prendiamo il caso della forma differenziale ternaria, corrispondente, nella tabella del n. 7, al sistema commutativo di numeri a tre unità del tipo I). Qui il sistema differenziale (17) diventa

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_2^2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_3}\,;$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_1}\,, \quad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_2}$$

la cui soluzione generale si calcola subito in

$$(19) \qquad \mathrm{U} = e^{x_3}(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3) + c_4$$

con le quattro costanti arbitrarie c_1, c_2, c_3, c_4, delle quali le prime tre sono

[1] Geometricamente è chiaro che le $y_1, y_2, \ldots y_n$ sono indipendenti, perchè le $y_i = \mathrm{cost}$ sono le equazioni di n sistemi di iperpiani paralleli, due a due ortogonali. Algebricamente risulta da ciò che, per le (18), il valore del determinante formato cogli elementi $\beta_{ik} = \sum_{r,s}^{1\ldots n} \mathrm{A}_{rs} \frac{\partial y_i}{\partial x_r} \frac{\partial y_k}{\partial x_s}$ è eguale all'unità; esso si risolve d'altronde nel prodotto del determinante $|\mathrm{A}_{rs}|$ pel quadrato dal Jacobiano $\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)}$, che è dunque diverso da zero.

i valori *iniziali* delle derivate $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}$ per $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Le formole pel passaggio dalle coordinate x_1, x_2, x_3 alle *cartesiane ortogonali* y_1, y_2, y_3 potranno assumersi date da

$$(20)\qquad \begin{cases} y_1 = e^{x_3}(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}) \\ y_2 = e^{x_3}(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}) \\ y_3 = e^{x_3}(c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}), \end{cases}$$

dove le nove costanti c_{rs} dovranno soltanto essere legate dalle 6 relazioni che seguono dalle (18) *pei valori iniziali* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; e queste calcoliamo nel modo seguente. Il valore iniziale del discriminante della forma è $A = \begin{vmatrix} a & b & \alpha \\ b & c & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$, e se indichiamo con ω_{ik} i minori di secondo ordine di quest'ultimo determinante, i valori *iniziali* delle A_{ik} sono $\frac{\omega_{ik}}{A}$, quindi inizialmente $\nabla(y_i, y_k) = \sum_{r,s}^{1...3} A_{rs} \frac{\partial y_i}{\partial x_r}\frac{\partial y_k}{\partial x_s}$ ha il valore

$$\sum_{r,s}^{1...3} \frac{\omega_{rs}}{A} c_{ir}\, c_{ks};$$

dunque le relazioni a cui dobbiamo assoggettare le nove costanti c_{ik} nelle (20) sono

$$\sum_{r,s}^{1...3} \omega_{rs}\, c_{ir}\, c_{ks} = \varepsilon_{ik} A.$$

In modo affatto simile, per gli altri tre tipi di forme, corrispondenti ai tipi II), III), IV) di sistemi a tre unità (n. 7), si troverebbe per l'integrale generale delle corrispondenti equazioni (17)

$$\text{Tipo II)}\qquad U = e^{x_3}\left(c_1 x_1 + c_1 \frac{x_2^2}{2} + c_2 x_2 + c_3\right) + c_4$$

$$\text{Tipo III)}\qquad U = c_1 e^{x_1} + (c_2 x_2 + c_3)\, e^{x_3} + c_4$$

$$\text{Tipo IV)}\qquad U = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{x_2} + c_3 e^{x_3} + c_4,$$

dopo di che la riduzione della forma a coordinate cartesiane ortogonali y_1, y_2, y_3, si effettua come sopra.