ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

logico ι, non considerato da Russell, è stato introdotto genialmente da Peano ed è di capitale importanza logica.

La dimostrazione della condizione $(a, b) = (a', b')$ rimane invariata (n. 6, pp. 411, 412), come pure rimangono invariate le altre considerazioni.

L'unica trasformazione che faccio alla prima Nota è dunque questa: pongo ora [la prima delle (1)]

$$(a, b)\, a = a$$

in luogo della

(2) $$(a, b)\, a = \iota a$$

che avevo posta prima.

La ragione del cambiamento è facile a vedersi. Le (1) ove al posto della prima si ponga la (2), sono *simmetriche* rispetto ad a e b e quindi risulterebbe $(a, b) = (b, a)$ anche per $a \neq b$. Con le (1) invece si ha

$$(b, a)\, a = \iota a\,,\quad (b, a)\, b = b\,,\quad (b, a)\, x = \iota a \cup \iota b$$

e quindi $(a, b) \neq (b, a)$ quando sia $a \neq b$. Si noti che ponendo le (1) senza la condizione $a \neq b$, allora per la coppia (a, a) si avrebbe $(a, a)\, a = a$, ovvero $(a, a)\, a = \iota a$ secondochè l'elemento a cui si applica è il *primo* o il *secondo* della coppia; nè a togliere tale assurdo varrebbe affermare che, per definizione, si è ammesso che (a, b) è l'operatore *identità* soltanto *quando è applicato al primo elemento di* (a, b).

Si può notare che nella dimostrazione, già citata, della condizione $(a, b) = (a', b')$, si è *implicitamente* fatto uso della (1), poichè abbiamo distinto il *primo* dal *secondo* elemento della coppia, non soltanto come elementi, ma proprio come occupanti, rispettivamente, il primo e secondo posto; era però necessario togliere ogni equivoco logico formale il che si ottiene facilmente mediante l'operatore logico ι e le sue potenze.

Matematica. — *Hamiltoniani e gradienti di formazioni estensive nell'Analisi generale di Grassmann.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1].

In due Note successive dal titolo comune: *Gli hamiltoniani ed i gradienti nell'analisi generale ad n dimensioni di Grassmann* [2], presentate nelle sedute dei giorni 1 ed 8 del mese di luglio u. s. della R. Accademia di Napoli, e che compariranno nel fasc. luglio-agosto dei Rendiconti di essa, io ho definito certi *operatori* per uno spazio ad n dimensioni di Grassmann, e per funzioni scalari, che ho chiamati *hamiltoniani* e *gradienti* (anche, risp. *derivate esterne* e *derivate interne*): e la cui opportunità e portata ho messo

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] Tali Note verranno, nel seguito, indicate rispettivamente con N I, N II.

in sufficiente rilievo nei brevi cenni che servono di introduzione a tali No e. Di operatori del tipo dei gradienti, come ivi accennai, avevo già fatto uso in altri lavori [1]; ma, in questi, mancò la considerazione degli hamiltoniani, ed i gradienti vi fecero comparsa da un punto di vista troppo particolare [2]. Ora, e per completare nelle sue costruzioni fondamentali la teoria appena iniziata dei due operatori, e per aumentarne la portata, estendo, con lo scritto presente, le nozioni di hamiltoniano e di gradiente al caso di funzioni estensive di qualsiasi ordine.

1. Conservando le medesime notazioni adoperate nelle N I, N II, sia U una funzione estensiva dell'ordine σ, e supponiamola scritta nella forma

$$\text{(1)} \qquad U = U_1 . F_1 + U_2 . F_2 + \cdots + U_q . F_q$$

ove $U_1, U_2, \ldots, U_q$ siano funzioni scalari delle variabili $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ con le quali è composta la formazione

$$\text{(2)} \qquad \Omega = \omega_1 . E_1 + \omega_2 . E_2 + \cdots + \omega_m . E_m \qquad m = \binom{n+1}{\varrho},$$

d'ordine ϱ, rispetto a cui si *deriva*; e le $F_i = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\sigma}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_\sigma)$ con $i = 1, 2, \ldots, q$ siano i $q = \binom{n+1}{\sigma}$ prodotti σ a σ delle $n+1$ unità fondamentali $e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$, numerati ed ordinati coi medesimi criterî che servirono di base alla numerazione degli $E_i = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\varrho}$. Ritenendo altresì la denominazione di *piramide di riferimento* allo insieme delle unità $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ considerate quali *punti indipendenti* di uno spazio ad n dimensioni di Grassmann, e di *ϱ-spigolo* E_i al prodotto $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_\varrho}$, diremo *hamiltoniano elementare della* U, *rispetto al ϱ-spigolo* E_i della piramide

(1) *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica dei sistemi materiali ad n dimensioni ed a curvatura costante* ecc. (questi Rendiconti, giugno 1912); *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica* ecc. *nel caso di vincoli in termini differenziali non integrabili* (Rend. Acc. Napoli, luglio 1912); *Sulle equazioni generali per la Dinamica* ecc. (Ann. di Mat. pura ed applicata, serie III, tomo XXII).

(2) Il caso particolare deriva dal fatto che l'*operatore* utilizzato è una *derivata interna* rispetto ad un *punto* o ad un *vettore*; mentre nelle N I, N II e nella Nota presente vengono considerate derivate *interne* ed *esterne*, rispetto a formazioni d'ordine assegnato, *semplici* [al finito (*multi-punti*), all'infinito (*multi-vettori*, *multipunti-misti* o *multivettori-misti*] e *composte*, considerate quali *variabili*. Da rilevarsi però è il fatto che, grazie alle costanti $\alpha^2_1, \alpha^2_2, \ldots, \alpha^2_{n+1}$ le quali accompagnano i diversi termini che compongono l'espressione dell'operatore, esso (posto anche da parte il numero qualunque di dimensioni che qui si considera) è ancora molto più generale degli operatori del Minkowsky e di quelli di E. B. Wilson e di G. N. Lewis.

di riferimento, l'espressione:

$$(3)\qquad (-1)^{\rho\rho'} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \Big| E_i =$$

$$= (-1)^{\rho\rho'} \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial \omega_i} F_1 . \Big| E_i + \frac{\partial U_2}{\partial \omega_i} F_2 . \Big| E_i + \cdots + \frac{\partial U_q}{\partial \omega_i} F_q . \Big| E_i \right\},$$

dove $\varrho' = n + 1 - \varrho$;

e diremo *gradiente elementare della* U, *rispetto al medesimo* ϱ*-spigolo*, l'espressione

$$(4)\qquad \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i = \frac{\partial U_1}{\partial \omega_i} F_1 . E_i + \frac{\partial U_2}{\partial \omega_i} F_2 . E_i + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega_i} F_q . E_i .$$

Queste espressioni sono identiche, nella forma dei loro primi membri, a quelle che si hanno pel caso di U scalare; ma i secondi membri mostrano che si tratta di *entità sostanzialmente diverse.*

Sommando da $i = 1$ ad $i = m$, membro a membro, le (3), troviamo

$$(5)\qquad (-1)^{\rho\rho'} \sum_1^m \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \Big| E_i =$$

$$= (-1)^{\rho\rho'} \left\{ \sum_1^m \frac{\partial U_1 F_1}{\partial \omega_i} \Big| E_i + \sum_1^m \frac{\partial U_2 F_2}{\partial \omega_i} \Big| E_i + \cdots + \sum_1^m \frac{\partial U_q F_q}{\partial \omega_i} \Big| E_i \right\};$$

e, sommando, in modo analogo, le (4):

$$(6)\qquad \sum_1^m \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i = \sum_1^m \frac{\partial U_1 F_1}{\partial \omega_i} E_i + \sum_1^m \frac{\partial U_2 F_2}{\partial \omega_i} E_i + \cdots + \sum \frac{\partial U_q F_q}{\partial \omega_i} E_i \text{ (1)}.$$

Queste somme saranno, rispettivamente, chiamate l' *hamiltoniano* ed il *gradiente* di U *rispetto ad* Ω, e saranno rispettivamente rappresentate scrivendo $\nabla_\Omega U$, $G_\Omega U$. Tenendo presenti le (3) e (4) si ha che

$$(7)\qquad (-1)^{\rho\rho'} \frac{\partial U_j F_j}{\partial \omega_i} \Big| E_i \quad , \quad \frac{\partial U_j F_j}{\partial \omega_i} E_i$$

sono rispettivamente l' *hamiltoniano* ed il *gradiente* della $U_j F_i$ rispetto al

(1) Il passaggio dalla forma di scrittura $\frac{\partial U_h}{\partial \omega_i} F_h . E_h$ quale presentasi nella (4) alla forma $\frac{\partial U_h F_h}{\partial \omega_i} . E_h$ quale è adoperata nella (6), per essere U_h scalare ed F_h estensiva, è giustificata dalla definizione, che venne data nella N I, della *derivata* d'una funzione estensiva rispetto ad una variabile scalare [cfr., al riguardo, il n. 1, *c* di tal Nota, formula (6)].

ϱ-spigolo E_i ($\equiv$ rispetto alla Ω ridotta ad $\omega_i E_i$); si può, dunque, da un lato scrivere le (3), (4) nella forma

$$(3') \qquad \nabla_{\Omega_i} U = \nabla_{\Omega_i}(U_1 F_1) + \nabla_{\Omega_i}(U_2 F_2) + \cdots + \nabla_{\Omega_i}(U_q F_q)$$

$$(4') \qquad G_{\Omega_i} U = G_{\Omega_i}(U_1 F_1) + G_{\Omega_i}(U_2 F_2) + \cdots + G_{\Omega_i}(U_q F_q)$$

e dall'altro scrivere le (29), (30) come segue:

$$(5') \qquad \nabla_\Omega U = \nabla_\Omega(U_1 F_1) + \nabla_\Omega(U_2 F_2) + \cdots + \nabla_\Omega(U_q F_q)$$

$$(6') \qquad G_\Omega U = G_\Omega(U_1 F_1) + G_\Omega(U_2 F_2) + \cdots + G_\Omega(U_q F_q),$$

che contengono le precedenti, e che dimostrano il carattere ***distributivo*** dei ∇_Ω, G_Ω considerati quali *operatori*, non solo relativamente alla $U = \sum_1^q U_j F_j$, ma anche relativamente alla $\Omega = \sum_1^m \Omega_i$ (con $\Omega_i = \omega_i E_i$); poichè [giova tenere le (5'), (6') anche nella seguente forma] evidentemente

$$(5'') \quad \nabla_\Omega U = \nabla_{\Omega_1} U + \nabla_{\Omega_2} U + \cdots + \nabla_{\Omega_m} U\,,\quad \nabla_\Omega = \nabla_{\Omega_1} + \nabla_{\Omega_2} + \cdots + \nabla_{\Omega_m}$$

$$(6'') \quad G_\Omega U = G_{\Omega_1} U + G_{\Omega_2} U + \cdots + G_{\Omega_m} U\,,\quad G_\Omega = G_{\Omega_1} + G_{\Omega_2} + \cdots + G_{\Omega_m}$$

2. a) Conviene dare alle (5'), (6') una forma ancora più espressiva, e di più facile applicazione. A tal uopo, consideriamo dapprima, a meno del fattore $(-1)^{\varrho\varrho'}$, l'hamiltoniano di $U_j F_j$ rispetto al ϱ-spigolo E_i, cioè [cfr. le (7)] la funzione

$$(8) \qquad \frac{\partial U_j F_j}{\partial \omega_i} \mid E_i = \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j \mid E_i = \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} (F_j \mid E_i),$$

ove $\dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i}$ è scalare. *Quattro casi possono darsi*:

1° caso. Il prodotto $F_j | E_i$ è identicamente nullo, il che avviene quando, essendo $\sigma + \varrho' \leq n+1$, cioè $\varrho \geq \sigma$, le $e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_\sigma}$ sono in parte, o tutte, fra le $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_\varrho}$; ovvero quando, essendo $\sigma + \varrho' \geq n+1$, cioè $\varrho \leq \sigma$, le $e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_\sigma}$ e le $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_\varrho}$ hanno meno di $\sigma - \varrho$ di elementi non comuni, poichè allora più di $\sigma - \varrho$ unità sono comuni ad F_j e $|E_i$. In tal caso, evidentemente, si può scrivere ($\sigma' = n + 1 - \sigma$):

$$(9) \qquad \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(F_j | E_i) = (-1)^{\varrho'\sigma} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(| E_i . F_j) =$$
$$= (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(| E_i . F_j) = (-1)^{\varrho\sigma'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i}(| E_i . F_j),$$

prendendo quella forma di potenza del -1 che meglio ci piace fra le tre indicate.

2° caso. Senza essere nullo, il prodotto $F_j | E_i$ è $\sigma + \varrho' < n + 1$

($\equiv \varrho > \sigma$); in tal caso $F_j | E_i$ è un prodotto progressivo, onde si ha $F_j | E_i =$ $= (-1)^{\varrho'\sigma} | E_i . F_j$; epperò

$$\frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i = (-1)^{\varrho'\sigma} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j . \tag{10}$$

3° caso. Senza essere nullo, il prodotto $F_j | E_i$ è $\sigma + \varrho' = n + 1$ ($\equiv \varrho = \sigma$); in tal caso $F_j | E_i$ è scalare, e si ha $F_j | E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} | E_i . F_j$; epperò

$$\frac{\partial U_i}{\partial \omega_i} F_j | E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j . \tag{11}$$

4° caso. Senza essere nullo, il prodotto $F_j | E_i$ è $\sigma + \varrho' > n + 1$ ($\equiv \varrho < \sigma$); in tal caso $F_j | E_i$ è un prodotto regressivo, e, detta H la grandezza estensiva di ordine $\sigma - \varrho$ ch'esso rappresenta, si ha successivamente

$$H = F_j | E_i \;, \quad | H = | F_j \| E_i = | F_j \, (-1)^{\varrho\varrho'} E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} | F_j . E_i .$$

Essendo $\sigma' = n + 1 - \sigma$, siccome da $\sigma + \varrho' > n + 1$ si deduce $\sigma' + \varrho < n + 1$, così sarà $| H = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma'} . E_i | F_j$; e quindi sarà pure

$$\| H = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma'} . | E_i \| F_j = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma' + \sigma\sigma'} . | E_i . F_j .$$

Ma è $\| H = (-1)^{(\sigma-\varrho)(n+1-\sigma-\varrho)} . H$; dunque, tenuto conto che

$$\varrho\varrho' + \varrho\sigma' + \sigma\sigma' + (\sigma - \varrho)(\sigma' - \varrho) \equiv \varrho\varrho' + \varrho^2 - \varrho\sigma \equiv \varrho(n + 1 - \sigma) \equiv \varrho\sigma'$$
(mod. 2):

$$H = F_j | E_i = (-1)^{\varrho\sigma'} | E_i . F_j ;$$

epperò

$$\frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i = (-1)^{\varrho\sigma'} | E_i . F_j . \tag{12}$$

Da tutto ciò concludiamo per l'hamiltoniano elementare rispetto al ϱ-spigolo E_i della piramide di riferimento, corrispondentemente agli ultimi tre casi esaminati, e col tener conto del primo che dà espressioni nulle:

(13)

1°) che $\Delta_{\Omega_i}(U_j F_j) = (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i =$

$$= (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho'\sigma} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j = (-1)^{\varrho'\sigma} \nabla_{\Omega_i} U_j . F_j$$

se $\sigma + \varrho' < n + 1$, cioè $\sigma < \varrho$;

2°) che $\nabla_{\Omega_i}(U_j F_j) = (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i =$

$$= (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j = (-1)^{\varrho\varrho'} \nabla_{\Omega_i} U_j . F_j$$

se $\sigma + \varrho' = n + 1$, cioè $\sigma = \varrho$;

3°) che $\nabla_{\Omega_i}(U_j F_j) = (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j | E_i =$

$$= (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma'} \frac{\partial U_j}{\partial \omega_i} | E_i . F_j = (-1)^{\varrho\sigma'} \nabla_{\Omega_i} U_j . F_j$$

se $\sigma + \varrho' > n + 1$, cioè $\sigma > \varrho$.

b) Ragionando in modo perfettamente analogo al precedente, concludiamo pel gradiente elementare rispetto allo stesso ϱ-spigolo E_i:

$$(14)\quad \begin{cases} 1^{\circ})\ \text{che}\ G_{\Omega_i}(U_j F_j) = \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j E_i = (-1)^{\varrho\sigma} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} E_i F_j = (-1)^{\varrho\sigma} G_{\Omega_i} U_j . F_j \\ \qquad \text{se}\ \varrho + \sigma < n+1\,; \\ 2^{\circ})\ \text{che}\ G_{\Omega_i}(U_j F_j) = \dfrac{d U_j}{\partial \omega_i} F_j E_i = (-1)^{\varrho\varrho'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} E_i F_j = (-1)^{\varrho\varrho'} G_{\Omega_i} U_j . F_j \\ \qquad \text{se}\ \varrho + \sigma = n+1\,; \\ 3^{\circ})\ \text{che}\ G_{\Omega_i}(U_j F_j) = \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} F_j E_i = (-1)^{\varrho'\sigma'} \dfrac{\partial U_j}{\partial \omega_i} E_i F_j = (-1)^{\varrho'\sigma'} G_{\Omega_i} U_j . F_j \\ \qquad \text{se}\ \varrho + \sigma > n+1\,. \end{cases}$$

c) Con l'aiuto delle (13), (14), per $j = 1, 2, \ldots, q$ sostituite rispettivamente nelle (3), (4), si ricava

$$(15)\qquad \nabla_{\Omega_i} U = (-1)^{\theta} (\nabla_{\Omega_i} U_1 . F_1 + \nabla_{\Omega_i} U_2 . F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega_i} U_q . F_q$$

con $\theta = \varrho'\sigma, \varrho\varrho', \varrho\sigma'$ secondochè $\sigma + \varrho'$ è $<, =, >$ di $n+1$; e

$$(16)\qquad G_{\Omega_i} U = (-1)^{\theta} (G_{\Omega_i} U_1 . F_1 + G_{\Omega_i} U_2 . F_2 + \cdots + G_{\Omega_i} U_q . F_q)$$

con $\theta = \varrho\sigma, \varrho\varrho', \varrho'\sigma'$ secondochè $\varrho + \sigma$ è $<, =, >$ di $n+1$.

d) Con l'aiuto delle (15), (16), per $i = 1, 2, \ldots, m$, e delle $(5'')$, $(6'')$, si ricava poi, in fine:

$$(17)\qquad \nabla_{\Omega} U = (-1)^{\varrho'\sigma} (\nabla_{\Omega} U_1 . F_1 + \nabla_{\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} U_q . F_q)$$

se $\varrho' + \sigma < n+1$, o, ciò che è lo stesso, $\sigma < \varrho$:

$$(18)\qquad \nabla_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\varrho'} (\nabla_{\Omega} U_1 . F_1 + \nabla_{\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} U_q . F_q)$$

se $\varrho' + \sigma = n+1$, cioè se $\sigma = \varrho$;

$$(19)\qquad \nabla_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\sigma'} (\nabla_{\Omega} U_1 . F_1 + \nabla_{\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} U_q . F_q)$$

se $\varrho' + \sigma > n+1$, cioè se $\sigma > \varrho$; e

$$(20)\qquad G_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\sigma} (G_{\Omega} U_1 . F_1 + G_{\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + G_{\Omega} U_q . F_q)$$

se $\varrho + \sigma < n+1$;

$$(21)\qquad G_{\Omega} U = (-1)^{\varrho\varrho'} (G_{\Omega} U_1 . F_1 + G_{\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + G_{\Omega} U_q . F_q)$$

se $\varrho + \sigma = n+1$;

$$(22)\qquad G_{\Omega} U = (-1)^{\varrho'\sigma'} (G_{\Omega} U_1 . F_1 + G_{\Omega} U_2 . F_2 + \cdots + G_{\Omega} U_q . F_q)$$

se $\varrho + \sigma > n+1$.

e) È da mettersi in rilievo, come conseguenza delle precedenti espressioni date per $\nabla_{\Omega} \mathrm{U}$ e $\mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}$, quanto appresso:

1°) $\nabla_{\Omega} \mathrm{U}$ *è una funzione estensiva di specie* $n+1-\varrho+\sigma$ *quando* $\varrho > \sigma$, *è una funzione scalare quando* $\varrho = \sigma$, *ed è una funzione estensiva di specie* $\sigma - \varrho$ *quando* $\varrho < \sigma$;

2°) $\mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}$ *è una funzione estensiva di specie* $\varrho + \sigma$ *quando è* $\varrho + \sigma < n+1$, *è una funzione scalare quando* $\varrho + \sigma = n+1$, *ed è una funzione estensiva di specie* $\varrho + \sigma - n - 1$ *quando* $\varrho + \sigma > n+1$.

Questi enunciati concordano perfettamente con quelli dati al n. 2, *b*) della Nota II, quando una funzione scalare si consideri come estensiva di specie (ordine) 0, nel qual caso è $\sigma = 0$, o come estensiva di specie $n+1$ (pseudo-scalare), nel qual caso è $\sigma = n+1$. Ed ove si considerino i casi di $\varrho = 0$, $\varrho = n+1$, i quali corrispondono all'essere la Ω una variabile scalare, o pseudo scalare, gli enunciati precedenti restano applicabili, per $\sigma \neq 0$, alle derivazioni (*esterne*, o *interne*) di funzioni estensive rispetto a variabili scalari, o pseudo-scalari; e per $\sigma = 0$ alle derivazioni ordinarie di funzioni scalari. Così, ogni funzione, sia scalare o pseudo-scalare, sia estensiva, ha il suo *hamiltoniano* ed il suo *gradiente* anche rispetto a variabili scalari, o pseudo-scalari; e questi si confondono, a meno della moltiplicazione per $e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$ del $\nabla \mathrm{U}$ quando $\varrho = 0$ o del GU quando è $\varrho = n+1$, con la derivata ordinaria di U se U è scalare, e con la derivata di U quale venne definita nella formula (6), quando U è estensiva.

3. a) Se nelle formule (17), (19) in ciascuna delle quali si può immaginare racchiusa la (18), col ritenere la (17) per $\sigma \leqq \varrho$, e la (19) per $\sigma \geqq \varrho$, poniamo, al posto di Ω, la formazione supplementare $|\Omega$; siccome allora si dovrà cambiare ϱ' in ϱ, e viceversa, si avrà:

$$\nabla_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\sigma} (\Delta_{|\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \nabla_{|\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \nabla_{|\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q) \tag{23}$$
se $\varrho + \sigma \leqq n+1$;

$$\nabla_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho'\sigma'} (\nabla_{|\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \nabla_{|\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \nabla_{|\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q) \tag{24}$$
se $\varrho + \sigma \geqq n+1$.

Ora, dalle formule (14) della N II, poichè $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_q$ sono funzioni scalari, si ha, per $h = 1, 2, \ldots, q$:

$$\nabla_{|\Omega} \mathrm{U}_h = \mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}_h ; \tag{25}$$

dunque sarà:

$$\nabla_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\sigma} (\mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q \tag{23'}$$
quando $\varrho + \sigma \leqq n+1$, e

$$(24') \qquad \nabla_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho'\sigma'} (\mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q)$$

quando $\varrho + \sigma > n + 1$.

Confrontando con le (20), (21), (22) si deduce, qualunque sia il caso,

$$(26) \qquad \nabla_{|\Omega} \mathrm{U} = \mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U} ;$$

epperò: *pure per funzioni estensive, il gradiente rispetto ad una data formazione può essere definito come l'hamiltoniano rispetto alla formazione supplementare* (cfr. Nota II, n. 2, *b*).

b) Se, nelle (20), (22), ciascuna delle quali può essere considerata come abbracciante la (21), si cambia Ω in $|\Omega$, si avrà, dovendosi allora cambiare pure ϱ con ϱ':

$$\mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1^{\varrho'\sigma} (\mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q)$$

per $\varrho' + \sigma \leq n + 1$;

$$\mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\sigma'} (\mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q).$$

per $\varrho' + \sigma > n + 1$.

Ora, dalle (15) della N II si rileva che, essendo $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_q$ funzioni scalari, è, per $h = 1, 2, \ldots, q$:

$$\mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U}_h = (-1)^{\varrho\varrho'} \nabla_{\Omega} \mathrm{U}_h ;$$

dunque sarà:

$$(27) \quad \begin{cases} \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho'\sigma} (\nabla_{\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \nabla_{\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q) \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \leq n + 1, \text{ e} \\ \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\varrho' + \varrho\sigma'} (\nabla_{\Omega} \mathrm{U}_1 . \mathrm{F}_1 + \nabla_{\Omega} \mathrm{U}_2 . \mathrm{F}_2 + \cdots + \nabla_{\Omega} \mathrm{U}_q . \mathrm{F}_q) \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \geq n + 1 . \end{cases}$$

Dal confronto con le (17), (18), (19) segue essere:

$$(28) \qquad \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\varrho'} \nabla_{\Omega} \mathrm{U} ;$$

epperò: *come per le funzioni scalari* [cfr. le (15), N. II], *così per le estensive, il gradiente di una funzione* U *rispetto alla formazione supplementare di una data* Ω *eguaglia l'hamiltoniano di* U *rispetto ad* Ω, *moltiplicato per* $(-1)^{\varrho\varrho'}$ (ϱ e ϱ' secondo il significato innanzi stabilito sono, rispettivamente, l'ordine di Ω e della supplementare). Anche per U estensiva saranno adoperati alle volte i simboli $\dfrac{d\mathrm{U}}{d\,\Omega}, \dfrac{d\mathrm{U}}{d|\Omega}$ in luogo di $\nabla_{\Omega} \mathrm{U}, \mathrm{G}_{\Omega} \mathrm{U}$.

4. Non è possibile qui, per la ristrettezza dello spazio consentitoci, presentare altre proprietà degli operatori introdotti, nè di far cenno dell'interesse che essi presentano nelle applicazioni, mettendo in evidenza qualche esempio speciale. Ciò sarà oggetto, io spero, di comunicazioni ulteriori.