

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTI. PIO BEFANI

1916

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1916.

Meccanica celeste. — *Sopra la forma dello sferoide lunare.*
Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (¹).

1. Nella presente Nota espongo una mia idea destinata a spiegare un disaccordo, già più volte notato, nella teoria della figura della luna. Benchè il mio concetto sia semplicissimo, e benchè gli studi del Darwin, su cui esso si fonda, siano assai conosciuti, pure nessun autore ne ha mai fatto parola, almeno per quante ricerche io abbia eseguite. Credo quindi opportuno di darne parte all'Accademia.

2. Chiamiamo con A, B, C i tre momenti naturali d'inerzia del globo lunare e cerchiamo di determinare i due rapporti (²):

$$(1) \quad \alpha = \frac{C - B}{A} \quad \beta = \frac{C - A}{B}.$$

Abbiamo due vie, e cioè: o servirci della teoria generale delle figure di equilibrio, o dedurli dalle osservazioni del moto di librazione lunare *reale*. Dovremmo logicamente aspettarci di giungere con i due metodi ad identici risultati, ma al contrario le due serie di valori di α , β , a cui così si

(¹) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1916.

(²) Nella teoria dei moti libratori si considera anche il terzo rapporto

$$\gamma = \frac{B - A}{C}$$

il quale però è legato ai due primi dall'identità $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha\beta}$.

perviene, risultano assai differenti tra di loro. E, ciò che è anche più notevole, le mutue differenze hanno tutte lo stesso segno, indizio sicuro che non si tratta di un errore accidentale.

3. Più particolarmente:

a) Partendo dalle osservazioni del moto di librazione lunare reale (da non confondersi con la librazione ottica) ed eseguendo gli opportuni calcoli, secondo le note teorie dinamiche, troviamo ⁽¹⁾:

$$(2) \quad \alpha = 0,000.299 \quad ; \quad \beta = 0,000.614 ;$$

b) Servendoci invece della teoria generale delle figure di equilibrio, nell'ipotesi dell'omogeneità ⁽²⁾ abbiamo con grande approssimazione $\alpha = \frac{\beta}{4}$ e precisamente:

$$(3) \quad \alpha = 0,000.009.4 \quad ; \quad \beta = 0,000.0375 ;$$

cioè dei valori da sedici a trenta volte minori dei primi. Le differenze dei valori dedotti dall'osservazioni da quelli calcolati, dati dalla tabella seguente

Valori ded. dall'osserv.	Valori calcol.	Differ. Oss.-Calc.
$\alpha = 0,000.299$	$\alpha = 0,000.0094$	+ 0,000.2896
$\beta = 0,000.614$	$\beta = 0,000.0375$	+ 0,000.5765

hanno tutte lo stesso segno, ciò che rende il disaccordo anche più notevole.

Se si suppone la luna non omogenea il problema non è più integrabile. Però limitandosi ad una soluzione approssimata ⁽³⁾, e supponendo che le superficie di eguale densità siano ellissoidi, Laplace ha trovato che α e β conservano lo stesso rapporto. Egli ha poi dimostrato che se la densità aumenta, dalla superficie al centro, α e β assumono valori minori che nel caso dell'omogeneità ⁽⁴⁾. Ammettendo la luna non omogenea il disaccordo verrebbe quindi peggiorato.

⁽¹⁾ V. Tisserand, *Méc. cél.*, tomo II, pag. 473. Le osservazioni cui si fonda il Tisserand sono principalmente quelle eseguite a Königsberg da Schlüter, determinando con un eliometro la posizione del cratere A Mösting per un periodo di circa tre anni (Ved. *Memorie dell'Osservatorio di Königsberg*).

⁽²⁾ V. Tisserand, *Méc. cél.*, tomo II, pag. 110 e ss.

⁽³⁾ Laplace, *Traité de Méc. Cél.*, tome II, livre V, § 18 (Ed. di Crapelet, Parigi, anno VII).

⁽⁴⁾ Laplace, op. cit., pag. 371. Notiamo a tale proposito che nella teoria del Laplace sugli sferoidi, i rapporti tra le differenze dei momenti d'inerzia e i momenti stessi possono essere considerati come quantità piccole di primo ordine. Possiamo quindi scambiare

$\frac{C-A}{B}$ con $\frac{C-A}{A}$, giacchè si ha identicamente $\frac{C-A}{A} = \frac{C-A}{B} \left\{ 1 + \frac{B-A}{A} \right\}$.

4. Per spiegare questa differenza il Tisserand ⁽¹⁾, seguendo le idee di Laplace, si trova costretto ad ammettere che la luna si sia notevolmente alterata dopo la sua solidificazione. Benchè quest'opinione non sia molto plausibile, giacchè il segno costante delle differenze, Osserv.-Calcolo, mostra che non può trattarsi di deformazioni accidentali, essa è stata ammessa da tutti gli astronomi posteriori; almeno da quanto mi risulta.

5. A me sembra invece che il fatto potrebbe spiegarsi assai semplicemente, sia ammettendo la luna ancor fluida nell'interno (oppure sede di movimenti ciclici, adottando una teoria analoga a quella esposta dal prof. sen. Volterra) ⁽²⁾, ciò che porterebbe a correggere i *primi* valori di α, β ; sia invece supponendo che la luna si sia solidificata a minore distanza dalla Terra, ciò che altera i *secondi* valori di α, β .

Data la piccola massa e lo stato dello sferoide lunare, la prima opinione sembrerebbe meno probabile; io credo quindi che il fatto possa spiegarsi nel modo più naturale, ritenendo che la luna si sia solidificata ad una distanza dalla Terra minore dell'attuale, in perfetto accordo con le ricerche classiche del Darwin.

6. Svolgo questo concetto in poche parole. Come è notissimo, secondo il Darwin, la Terra e la luna ancora fluide furono soggette a grandi maree, alle quali prendeva parte tutta la loro massa (*body-tides*), e il cui effetto, fra l'altro, era di aumentare la distanza media dei due corpi.

Partendo da ciò, noi possiamo ragionare nella seguente maniera. La luna si solidificò certamente assai prima della Terra; quindi, anche dopo la sua solidificazione dovette continuare ad allontanarsi a causa delle grandi maree di massa persistenti nella Terra ancora fluida: la distanza a cui avvenne la solidificazione della crosta lunare, fu quindi minore della distanza attuale.

7. Una volta giunti a questa conclusione, tutto si spiega con la massima semplicità. Infatti la teoria generale delle figure di equilibrio, nell'ipotesi dell'omogeneità, dà per α, β , le formole ⁽³⁾

$$(4) \quad \alpha = \frac{5}{4} \frac{M' a^3}{M l^3} ; \quad \beta = 5 \frac{M' a^3}{M l^3} ;$$

⁽¹⁾ Op. cit., pag. 375: «... Laplace suppose qu'en se solidifiant, la Lune a subi quelques modifications; les hautes montagnes et les autres inégalités que l'on observe à sa surface doivent avoir sur les différences des moments d'inertie une influence très sensible et d'autant plus grande que l'aplatissement du spheroïde lunaire est fort petit et sa masse peu considérable ».

⁽²⁾ Cfr. V. Volterra, *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. Rend. della R. Accademia delle Scienze di Torino 1895; ved. anche, sul medesimo argomento, una Nota dello stesso autore in *Astr. Nachr.*, Bd 138, con una tavola.

⁽³⁾ Cfr. Tisserand, op. cit., tomo II, cap. VIII « *Figure d'équilibre d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné* » in particul. pag. 115.

dove M' , M , a , l indicano la massa lunare e terrestre, il semidiametro maggiore della luna e la distanza dei due centri.

Ponendo $l = d =$ distanza attuale, si hanno per α , β , i valori (3). Se si ammette invece che la distanza l di solidificazione sia minore della distanza attuale d , le differenze tra i valori (3) e i valori (2) tendono a diminuire. Per trovare il valore più opportuno di l , chiamando con d la distanza attuale, poniamo $\frac{d^3}{l^3} = \lambda$. Seguendo allora il metodo dei minimi quadrati sceglieremo λ , in modo che sia:

$$(5) \quad (614 - 37,5\lambda)^2 + (299 - 9,4\lambda)^2 = \text{minimo}.$$

Fatti i calcoli si ha $\lambda = 17,3$ circa, e quindi $l = 148.438$ Km.

Tornando di nuovo a servirci delle (4) abbiamo la seguente tabella con i nuovi valori di α , β :

Valori ded. dall'osserv.	Valori calcol.	Osserv.-Calc.
$\alpha = 0,000.299$	$\alpha = 0,000.163$	+ 0,000.136
$\beta = 0,000.614$	$\beta = 0,000.648$	- 0,000.034

Le nuove differenze sono assai minori delle antiche e non conservano più il medesimo segno.

Tutto ciò nell'ipotesi dell'omogeneità: nel caso poi di densità crescente dalla superficie al centro, basta supporre che la solidificazione sia avvenuta a distanza ancora minore, secondo quanto è stato già detto.

Unendo per comodità tutti i risultati in un solo quadro abbiamo la seguente

TABELLA RIASSUNTIVA (1).

Valori dedotti dalle osservazioni del moto libratorio	Valori dedotti dalla teoria delle figure di equilibrio	
	Supponendo la solidificazione avvenuta alla distanza attuale $d = 384.454$ Km.	Supponendo la solidificazione avvenuta a distanza $l = 148.438$ Km.
$\alpha = 0,000.299$	$\alpha \approx 0,000.009$	$\alpha = 0,000.163$
$\beta = 0,000.614$	$\beta \approx 0,000.037$	$\beta = 0,000.648$

8. Termineremo con un'osservazione. È noto ad ognuno quanto la crosta lunare sia sconvolta e disseminata di rotture e scabrosità. Lasciando da parte le Memorie degli osservatori meno recenti, Beer e Mädler (2), Birt (3),

(1) Il segno = vale nel caso dell'omogeneità; il segno < nel caso di densità crescente della superficie al centro.

(2) Beer e Mädler, *Der Mond nach seinen Kosmischen und individuellen Verhältnissen*.

(3) *A catalogue of lunar objects with notes and illustrations*, Londra 1873.

Nasmith ⁽¹⁾, Neison ⁽²⁾, ci limiteremo soltanto agli studî moderni dei signori Loewy e Puiseux. Questi scienziati, nelle loro pazienti ricerche, parlano più volte degli *efforts de soulèvement* a cui si direbbe che la crosta lunare sia stata assoggettata in alcuni punti particolari. Passando poi all'esame di altri dettagli del suolo lunare, essi ammettono esplicitamente dei « *mouvements généraux de l'écorce lunaire qui ont amené la formation des traînées blanches* » ⁽³⁾.

Quanto alle cause che hanno prodotto questi fenomeni, gli autori credono di trovarle nel fatto che « *la quantité de gaz et de vapeurs emprisonnés a dû être relativement plus considérable dans l'écorce lunaire que dans l'écorce terrestre en raison du refroidissement plus rapide etc.* » ⁽⁴⁾.

Si potrebbe forse osservare che anche la massa lunare era assai minore della terrestre; ma noi, pur riconoscendo la giustezza di queste idee specialmente nel dar ragione dell'origine dei circhi lunari, ci limiteremo ad osservare che la nostra teoria è altrettanto utile nello spiegare i moti della crosta. Infatti la corteccia lunare, solidificatasi allorchè il satellite era vicino alla Terra, cessò di essere una superficie equipotenziale quando la distanza tra i due astri aumentò notevolmente. Se la luna fosse stata ancor fluida, essa si sarebbe allora avvicinata alla forma sferica. Essendo la corteccia già formata, questo cambiamento non poté avvenire, ma certamente la crosta ancor debole si piegò e si ruppe in qualche parte, conformandosi alquanto alle nuove condizioni di equilibrio. *Così si spiegano nella maniera più semplice « les efforts de soulèvement », e soprattutto « les mouvements généraux de l'écorce ».*

Le due spiegazioni del resto, quella dei sigg. Loewy e Puiseux e la mia, possono essere ammesse simultaneamente, completandosi a vicenda. Anzi, come ho già detto, la teoria del Loewy e Puiseux è forse da preferirsi nella spiegazione di sollevamenti *locali* (p. es. *circhi lunari*, già paragonati dal Secchi « a grandi bolle scoppiate o a cupole sfondate »); la mia invece mi sembra più adatta a dar ragione di moti *generalî* (origine di catene montagnose, grandi spaccature longitudinali (*scanalature*) ecc.). In ogni caso io ho creduto d'insistere su questo punto, giacchè non trovo che alcun autore, parlando delle grandi irregolarità della crosta lunare, abbia mai accennato al fatto che, a causa della maggior vicinanza della Terra, essa si formò in condizioni di equilibrio assai differenti dalle condizioni attuali.

9. Riepilogando, vediamo che la teoria del Darwin non solo ci spiega la differenza tra le due serie dei valori di α, β , ma ci dà anche ragione di altri fenomeni che osserviamo sulla superficie lunare.

⁽¹⁾ *The Moon considered as a planet, a world and a satellite*, id. 1874.

⁽²⁾ *The Moon and the conditions and configurations of its surface*, id. 1876.

⁽³⁾ Cfr. MM. Loewy et Puiseux, *Sur la constitution et l'histoire de l'écorce lunaire*. Comptes Rendus, 4 mai 1896.

⁽⁴⁾ Id. id.