ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Derivazione ad indice qualunque*. Nota I della dott.ssa Angela Maria Molinari, presentata dal Corrispondente E. Almansi [1].

Non è nuova l'idea di voler estendere il concetto di derivazione anche per un indice frazionario: Leibniz ne dà un primo accenno; Eulero [2] ha scritto qualche pagina, che Lacroix richiama nel suo *Traité de calcul différentiel* [Traitè III (1819), pag. 409], riportate anche da Liouville nella Memoria *Sur le théorème des fonctions complémentaires* (1834); un altro cenno si trova pure nelle opere di Laplace *Sur les probabilités*; Lagrange (Berlin, Mém. 1772, pag. 186) predisse che la derivazione generalizzata sarebbe stata la base del calcolo dell'avvenire. Fourier, nella sua *Théorie analytique de la chaleur*, indica una formula generale che considera come atta a trasformare in integrali doppî i differenziali ad indici qualunque. A Liouville, però, si deve l'aver mostrato più ampiamente alcuni partiti che si potevano trarre dal calcolo differenziale generalizzato [3].

Liouville parte, nella sua Memoria *Sur quelques questions de géometrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour resondre ces questions* (1832), dalla formula

$$y = \Sigma A_m e^{mx}$$

suppone dunque una funzione y sviluppabile in serie (o integrale esponenziale) e, dopo aver posto

$$D^\mu e^{mx} = \frac{d^\mu}{dt^\mu} e^{mx} = m^\mu e^{mx},$$

ne ricava

$$D^\mu y = \Sigma A_m m^\mu e^{mx} \tag{1}$$

che definisce per lui la derivata ad indice qualunque. Ad esempio

$$y = \frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, d\alpha \qquad x > 0$$

$$D^\mu y = \int_0^\infty e^{-\alpha x}(-\alpha)^\mu\, d\alpha \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \mu \text{ qualunque} \end{cases}$$

ma $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{\mu-1}\, d\theta$, dunque, posto $\theta = \alpha x$,

$$D^\mu y = D^\mu \frac{1}{x} = \frac{(-1)^\mu\, \Gamma(\nu+1)}{x^{\mu+1}}.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1916.

[2] *De progressionibus trascendentibus sen quarum termini generales algebraice dari nequeunt.*

[3] Cfr. le Memorie contenute nel XXI Cahier del Journal de l'École Polytecnique (1832-1837).

In una Memoria seguente (1834), *Memoire sur le théorème des fonctions complémentaires*, Liouville parte invece dallo sviluppo della funzione secondo le potenze negative della variabile indipendente,

$$y = \Sigma \frac{A_n}{x^n}$$

e definisce

$$\text{(2)} \qquad D^{\mu} y = (1)^{\mu} \, \Sigma \frac{A_n \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n) \, x^{n+\mu}} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{con } n,\ (n+\mu) \\ \text{reali, positivi} \end{array}\right].$$

La definizione data da Liouville nella prima Memoria e quella riportata ora non sono indipendenti l'una dall'altra; Liouville mostra effettivamente come dalla (1) possa dedursi la (2); in modo analogo, definito il D^{μ} nel caso di una funzione sviluppabile in serie di potenze, è possibile ricavare la (1) da applicare quando la funzione è sviluppabile in serie esponenziale.

La difficoltà più grande, aggiunge il Liouville, consiste nel trovare una formula analoga alla (2), che dia il valore di $D^{\mu} \frac{1}{x^{\mu}}$ per tutti i possibili valori di n e di μ.

Il Laurent (nel III vol., pag. 487 del suo *Traité d'Analyse*) dà, come definizione della derivata d'ordine n della $f(z)$ monògena (analitica), nel punto x presa a partire da un punto x_0, l'integrale:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_{x_0} \frac{f(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}}$$

nel campo complesso, lungo un cappio a bordi rettilinei che parta da x_0 e vi ritorni, dopo aver girato con un cerchietto intorno al punto x. La derivata della $f(z)$ non è, in generale, monodroma intorno al punto x, i suoi diversi valori, che possono anche essere in numero infinito se n è incommensurabile, si permutano gli un gli altri intorno al punto x che è un punto critico. Il Laurent osserva che questa sua definizione, nel caso di n negativo, si confonde con quella data da Letnikof nel 1874 in un giornale russo. Per $n < 0$ l'integrale preso lungo il cappio ha valore zero; il suo valore lungo il primo bordo è:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{f(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}};$$

il suo valore preso lungo l'altro bordo (dopo aver girato intorno al punto critico x) è:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} \int_{x_0}^{\infty} \frac{f(z)\, dz}{(z-x)^{n+1}} e^{-2(n+1)\pi i}$$

La $D^n f(z)$ e dunque:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\left[1-e^{-2(n+1)\pi i}\right]\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

o

$$\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i}\left[e^{(n+1)\pi i}-e^{-(n+1)\pi i}\right]\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}},$$

o ancora

$$\Gamma(n+1)\,\frac{\operatorname{sen}(n+1)\,\pi}{\pi}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}}$$

e, se si osserva che

$$\Gamma(n+1)\,\Gamma(-n)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(n+1)\,\pi},$$

si ha infine:

$$(4)\qquad \frac{1}{\Gamma(-n)}\int_{x_0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{n+1}},$$

formula che Letnikof aveva adottata per definire la derivata d'ordine n nel caso di n negativo.

E gli esempi si potrebbero moltiplicare citando le formule di Lagrange, Caylay, Riemann, Grünwald, Most, Krug etc.

È stato però giustamente osservato che tutti questi metodi hanno avuto un indirizzo sempre parziale; gli autori cioè, anzichè partire da criterii generali o da scopi prefissi d'utilità pratica, hanno prese certe funzioni e certi sviluppi e stabilite delle formule d'interpolazione, sicchè queste ricerche si sono in gran parte risolte in argomento di curiosità scientifiche. Sarebbe desiderabile poter risolvere il problema affrontandolo con criterii più generali che dovrebbero derivare da questo: D^n soddisfi a proprietà analoghe a quelle della derivazione e integrazione ordinaria e sia definito con formule tali da conseguirne applicazioni utili, adatte a generalizzare quelle del calcolo ordinario.

Siamo ancora lontani, purtroppo, dal poter rispondere bene a questi desiderata: espongo però alcune idee che credo adatte ad entrare in argomento.

A mio avviso le condizioni da imporre alla D^n potrebbero precisarsi così:

1°) $D^n f(x)$ sia definita con una formula generale entro un esteso campo di funzioni di variabile reale (questo campo dovrebbe comprendere, per D^n qualunque, almeno tutte le $f(x)$ indefinitamente derivabili; più precisamente, per n positivo dato, tutte le funzioni che sono derivabili almeno tante volte quant' è l' intero immediatamente inferiore ad n; per n negativo il campo dovrebbe comprendere tutte le funzioni integrabili).

2°) La formula che definisce $D^n f(x)$ sia possibilmente analitica in n.

3°) D^n si riduca alla derivazione e integrazione ordinaria per n intero.

4°) D^n sia operazione distributiva, cioè

$$D^n(a\varphi + b\psi) = a\,D^n\varphi + b\,D^n\psi .$$

5°) $D^{m+n} f(x) = D^m D^n f(x) = D^n D^m f(x) = D^{n+m} f(x)$.

Nel cercare altre condizioni ed una definizione di D^n occorre tener conto della possibile pluralità dei valori, pluralità che ha formato lo scoglio delle ricerche precedenti. La pluralità si verifica già nel caso di n intero, negativo; non è possibile dunque prescinderne. Per esempio, noi abbiamo che $D^{-1}(0)$ non è necessariamente zero, ma zero più una costante arbitraria; così $D^{-1} e^{\varphi t} = \varphi^{-1} e^{\varphi t} +$ cost. arb. e via via. Non è quindi il caso di porre condizioni come

$$D^n e^{\varphi t} = \varphi^n e^{\varphi t}$$

le quali escluderebbero certe pluralità di soluzione e contradirebbero con le convenzioni usuali del calcolo, convenzioni che hanno una ragione d'essere pratica molto importante per la risoluzione delle operazioni inverse. Dovremo prevedere invece che

$$D^n f(x)$$

sarà, in generale, esprimibile per mezzo di due parti; una parte convenzionalmente assunta come *principale*, e l'altra *funzione complementare* contenente le eventuali costanti o funzioni arbitrarie; quindi la 4ª condizione dovrà intendersi solo purchè si tenga conto opportuno della parte complementare. In armonia alla 3ª condizione le arbitrarie dovranno sempre sparire quando n è intero positivo.

Questa distinzione, fra il valore principale e la parte contenente le arbitrarie, era già stata accennata da Liouville senza però tenerne conto nelle sue formule generali (¹).

In una Nota successiva esporrò, per ora limitatamente a quanto riguarda la ricerca del valore principale, una formula di definizione atta a soddisfare le condizioni imposte.

(¹) Cfr. Liouville, *Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires*. Journal de Créelle (1834), B. XI, pp. 1-19.