ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi ad n dimensioni di Grassmann.* Nota I di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Facendo seguito alla mia precedente Nota: *Hamiltoniani e gradienti di formazioni estensive* ecc. [2] ed alle due Note dei Rendiconti del mese di luglio della R. Acc. di Napoli, che ivi ho indicato con N I, N II, tratto qui di certe proprietà generali che collegano i due tipi di operatori; e vi introduco la nozione di *divergenza* per ogni funzione a più variabili nella qualità di hamiltoniano, o gradiente, particolare. Tratto, inoltre, del modo di comportarsi dei due operatori, rispetto al prodotto di due funzioni.

1. a) Vennero già notate nella precedente Nota le due relazioni significate dalle formole (26), (28) di essa, sussistenti fra gli hamiltoniani e gradienti di una stessa funzioue U, ed intendiamo, senza ripeterle, che siano qui tenute presenti. Ora, se, riferendoci alle formule (17), (18) per

$$\varrho' + \sigma \leq n + 1 \quad , \quad \varrho' + \sigma \geq n + 1 \ \text{risp.},$$

ed alle formule (21), (23) rispettivamente per

$$\varrho + \sigma < n + 1 \quad , \quad \varrho + \sigma \geq n + 1$$

della stessa Nota, prendiamo le formazioni supplementari delle $\nabla_\Omega \mathrm{U}$, $\mathrm{G}_{\bar\Omega}\mathrm{U}$, noi troviamo:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} |\nabla_\Omega \mathrm{U} = (-1)^{\varrho'\sigma} \sum\limits_{h=1}^{h=q} |\nabla_\Omega \mathrm{U}_h|\, \mathrm{F}_h = (-1)^{\varrho'\sigma} \cdot \sum\limits_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_\Omega \mathrm{U}_h \,|\, \mathrm{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \leq n + 1\,, \\ |\nabla_\Omega \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\sigma'} \sum\limits_{h=1}^{h=q} |\nabla_\Omega \mathrm{U}_h|\, \mathrm{F}_h = (-1)^{\varrho\sigma'} \cdot \sum\limits_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_\Omega \mathrm{U}_h \,|\, \mathrm{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho' + \sigma \geq n + 1\,, \end{array}\right\}$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} |\,\mathrm{G}_\Omega\, \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\sigma} \sum\limits_{h=1}^{h=q} |\,\mathrm{G}_h\, \mathrm{U}_h \,|\, \mathrm{F}_h = (-1)^{\varrho\varrho'+\varrho\sigma} \sum\limits_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_h\, \mathrm{U}_h \,|\, \mathrm{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho + \sigma \leq n + 1\,, \\ |\,\mathrm{G}_\Omega\, \mathrm{U} = (-1)^{\varrho'\sigma'} \sum\limits_{h=1}^{h=q} |\,\mathrm{G}_h\, \mathrm{U}_h \,|\, \mathrm{F}_h = (-1)^{\varrho'\sigma'+\varrho\varrho'} \sum\limits_{h=1}^{h=q} \mathrm{G}_h\, \mathrm{U}_h \,|\, \mathrm{F}_h \\ \qquad \text{se } \varrho + \sigma \geq n + 1\,; \end{array}\right\}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] Questi Rendiconti, vol. XXV, serie 5ª, 2° sem., fasc. 6°, 1916.

perchè, dall'essere le U_h $(h = 1, 2, \dots, q)$ funzioni scalari, hanno luogo le (14), (15) della Nota II. D'altro canto, se nelle (23′), (24′) della *Npr.* (così indicheremo la Nota cit., alla quale la presente fa seguito) mutiamo U in $|U$, con che si dovrà cambiare anche σ in σ', e viceversa, abbiamo

$$(3)\quad \begin{cases} |\nabla_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho\sigma'} \sum\limits_{h=1}^{h=q} G_h U_h | F_h \quad \text{se } \rho + \sigma' \leq n+1, \\ \qquad \text{cioè se } \rho' + \sigma \geqq n+1; \\ |\nabla_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho'\sigma} \sum\limits_{h=1}^{h=q} G_h U_h | F_h \quad \text{se } \rho' + \sigma \leq n+1, \\ \qquad \text{cioè se } \rho + \sigma' \geqq n+1. \end{cases}$$

Confrontando la 2ª delle (1) con la 1ª delle (3), e la prima delle (3) con la 2ª delle (1), si ha, in ogni caso,

$$(4)\qquad |\nabla_\Omega U = \nabla_{|\Omega}|U.$$

b) In modo analogo, cambiando nelle (27) U in $|U$, si ha:

$$G_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho\rho'+\rho'\sigma'} \sum_{h=1}^{h=q} \nabla_\Omega U_h | F_h \text{ se } \rho' + \sigma' \leq n+1, \text{ cioè se } \rho + \sigma \geqq n+1$$

$$G_{|\Omega}|U = (-1)^{\rho\rho'+\rho\sigma} \sum_{h=1}^{h=q} \nabla_\Omega U_h | F_h \text{ se } \rho' + \sigma' \geqq n+1, \text{ cioè se } \rho + \sigma \leq n+1;$$

e, dal confronto di queste con le (2), segue in entrambi i casi:

$$(5)\qquad |G_\Omega U = G_{|\Omega}|U.$$

I risultati forniti dalle (4), (5) si enunciano in linguaggio ordinario dicendo:

La funzione supplementare dell'hamiltoniano (o del gradiente) di una funzione U, *rispetto ad una formazione* Ω, *coincide con l'hamiltoniano (o col gradiente) della funzione supplementare di* U, *rispetto alla formazione supplementare di* Ω.

c) Tenendo presenti le (25), (26) della *Npr.*, dalle (4), (5) rispettivamente deduciamo:

$$|\nabla_\Omega U = G_\Omega |U \ \dots\ (6) \quad , \quad |G_\Omega U = (-1)^{\rho\rho'} \nabla_\Omega |U \ \dots\ (7);$$

vale a dire: 1°) *la funzione supplementare dell'hamiltoniano di una funzione* U, *rispetto ad una formazione* Ω, *coincide col gradiente della funzione supplementare di* U, *rispetto ad* Ω; 2°) *la funzione supplementare del gradiente di una funzione* U, *rispetto ad una formazione* Ω, *coincide con l'hamiltoniano della funzione supplementare di* U, *rispetto ad* Ω, *moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'}$ (ρ e ρ' essendo, al solito, gli ordini di Ω e di $|\Omega$).

Dalle (6), (7) applicate successivamente deduciamo:

$$(8)\qquad \|\nabla_\Omega U = |(G_\Omega | U) = (-1)^{\rho\rho'} \nabla_\Omega \| U = (-1)^{\rho\rho'+\sigma\sigma'} \nabla_\Omega U$$

$$(9)\qquad \| G_\Omega U = (-1)^{\rho\rho'} |(\nabla_\Omega | U) = (-1)^{\rho\rho'} G_\Omega \| U = (-1)^{\rho\rho'+\sigma\sigma'} G_\Omega U;$$

vale a dire: *il supplemento del supplemento dell'hamiltoniano* (*del gradiente*) *di una funzione* U *di ordine* σ, *rispetto ad una formazione* Ω *di ordine* ϱ, *coincide con l'hamiltoniano* (*col gradiente*) *di* U *rispetto ad* Ω, *moltiplicato per* $(-1)^{\rho\rho'+\sigma\sigma'}$.

d) Le formule da (4) a (9) contengono evidentemente le (14), (15) della N II. Per passare dalle (4), ..., (9) alle corrispondenti relativamente ad U scalare, e pseudo-scalare, basta fare in esse $\sigma = 0$, o $\sigma = -1$, con che $\sigma' = n + 1 - \sigma$ diventa, rispettivamente, $n + 1$ o 0.

2. **a**) Fra i varii hamiltoniani e gradienti di appartenenza ad una data funzione U, sono da mettersi in rilievo gli *scalari* ed i *pseudo-scalari*. Dai due teoremi dati al n. 2, **e**) della *Npr.* risulta che un hamiltoniano ed un gradiente sono numerici se, rispettivamente $\varrho = \sigma$, o $\varrho + \sigma = n + 1$.

Fra i valori che possono prendere ϱ e σ compatibilmente a queste condizioni, vi sono quelli di $\varrho = \sigma = 0$, o $\varrho = \sigma = n + 1$ nel 1° caso; e di $\varrho = 0$ con $\sigma = n + 1$, o $\varrho = n + 1$ con $\sigma = 0$ nel 2° caso. Questi sistemi di valori di ϱ e σ dànno, rispettivamente, per un hamiltoniano, uno pseudo-scalare ed uno scalare; e, per un gradiente, uno scalare ed uno pseudo-scalare; *i quali*, allorchè sia fatta eccezione del prodotto delle unità fondamentali che interviene negli pseudo-scalari, *si riducono tutti alla derivata ordinaria di una funzione numerica rispetto ad una variabile pure numerica*. Esclusi questi casi, per avere hamiltoniani numerici, bisognerà che l'ordine σ della formazione U *sulla* quale si opera, sia quanto l'ordine ϱ della formazione Ω *rispetto* alla quale si opera, ed entrambi distinti da 0, o da $n + 1$; e per avere gradienti numerici bisognerà che ϱ e σ, distinti entrambi da 0 o da $n + 1$, siano *complementari* ad $n + 1$.

b) Quando $\varrho = \sigma$, le $F_1, F_2, \dots, F_q$ sono le stesse $E_1, E_2, \dots, E_m$ $(q = m)$; ed allora, a parte il fattore $(-1)^{\rho\rho'}$ [cfr. form. (15), (18) *Npr.*],

$$\nabla_\Omega U_h . F_h = \nabla_\Omega U_h . E_h =$$

$$= (-1)^{\rho\rho'} \left(\sum^m \frac{\partial U_h}{\partial \omega_i} | E_i \right) E_h = (-1)^{\rho\rho'} \frac{\partial U_h}{\partial \omega_h} | E_h . E_h = \frac{\partial U_h}{\partial \omega_h} E_h | E_h = \frac{\partial U_h}{\partial \omega_h};$$

per cui, sommando da $h = 1$ ad $h = m$, si avrà:

$$(10)\qquad \nabla_\Omega U = (-1)^{\rho\rho'} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} + \frac{\partial U_2}{\partial \omega_2} + \dots + \frac{\partial U_m}{\partial \omega_m} \right).$$

Il 2° membro della (10) sarà detto, senz'altro, *divergenza* della funzione U; ma si intenderà che resti sottinteso il *significato d'origine* quale hamiltoniano della U rispetto ad una formazione d'ordine eguale all'ordine di U. Che se questa formazione è proprio la U stessa (interessa metterlo in rilievo) viene:

$$\nabla_u \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\varrho'} \cdot m. \tag{11}$$

c) Quando $\varrho + \sigma = n + 1$, sicchè $\sigma = n + 1 - \varrho = \varrho'$, fra le E_i vi saranno delle $\mathrm{E}_{i_1}, \mathrm{E}_{i_2}, \ldots, \mathrm{E}_{i_m}$ per le quali si suppone essere $\mathrm{F}_1 = |\mathrm{E}_{i_1}$, $\mathrm{F}_2 = |\mathrm{E}_{i_2}, \ldots, \mathrm{F}_m = |\mathrm{E}_{i_m}$ (anche in questo caso è $q = m$); ed allora:

$$\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U}_h . \mathrm{F}_h = \left(\frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_1}\mathrm{E}_1 + \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_2}\mathrm{E}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_m}\mathrm{E}_m\right) | \mathrm{E}_{i_h} =$$

$$= \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_{i_h}} \mathrm{E}_{i_h} | \mathrm{E}_{i_h} = \frac{\partial \mathrm{U}_h}{\partial \omega_{i_h}}.$$

Ne segue, sommando da $h = 1$ ad $h = m$, e moltiplicando per $(-1)^{\varrho\varrho'}$:

$$\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\varrho'}\left(\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \omega_{i_1}} + \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial \omega_{i_2}} + \cdots + \frac{\partial \mathrm{U}_m}{\partial \omega_{i_m}}\right). \tag{12}$$

Questa (12) suppone scritta, per U, la $\mathrm{U}_1 | \mathrm{E}_{i_1} + \mathrm{U}_2 | \mathrm{E}_{i_2} + \cdots$ che è la funzione supplementare della $\mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \mathrm{E}_{i_1} + \mathrm{U}_2 \mathrm{E}_{i_2} + \cdots + \mathrm{U}_m \mathrm{E}_{i_m}$; e questa è del medesimo ordine $\varrho = \sigma'$ della Ω; sicchè $\nabla_\Omega \mathrm{V} = (-1)^{\varrho\varrho'} \mathrm{G}_{|\Omega} \mathrm{V} =$ $= \mathrm{G}_\Omega | \mathrm{V}$, cioè *la divergenza d'una funzione* U *d'ordine* ϱ, valutata quale hamiltoniano rispetto ad una formazione qualsiasi del medesimo ordine, *eguaglia il gradiente, moltiplicato per* $(-1)^{\varrho\varrho'}$, *della funzione* U *rispetto alla formazione supplementare*; ovvero, *uguaglia il gradiente della funzione supplementare di* U, rispetto a quella medesima prima formazione. Applicando questo enunciato al caso in cui per Ω si prende U, si ha, insieme alla (11):

$$\mathrm{G}_\mathrm{U} | \mathrm{U} = (-1)^{\varrho\varrho'} . m \quad , \quad \mathrm{G}_{|u} \mathrm{U} = m. \tag{11'}$$

d) Affinchè, per una medesima *data* funzione estensiva (per la quale l'ordine rimane da *ciò* stesso prescritto) tanto l'hamiltoniano quanto il gradiente siano funzioni numeriche, bisognerà che, contemporaneamente, sia

$$\varrho + \sigma = n + 1 \quad , \; \varrho = \sigma ; \quad \text{cioè} \quad \varrho = \sigma = \frac{n+1}{2}. \tag{13}$$

Ora ciò non è possibile che per gli spazî ad un numero *dispari* di dimensioni.

Da rilevarsi è, intanto, il fatto che una divergenza, *per una data funzione*, si presenta come un gradiente, o come un gradiente cambiato di segno, *per la medesima*, secondochè l'ordine di questa e quello della supplementare non sono, o sono, entrambi dispari. Così, *negli spazii ad un numero dispari di dimensioni le sole divergenze di formazioni d'ordine dispari sono presentabili, senz'altro, come gradienti; le divergenze di formazioni d'ordine pari in tali spazi, e quelle relative a formazioni d'ordine qualsiasi in uno spazio ad un numero pari di dimensioni, sono presentabili come gradienti cambiati di segno*, nel senso dell'enunciato dato in **c**).

e) Per fare un esempio semplice relativamente a quanto si è detto, e per mostrare, nel medesimo tempo, in quale maniera delle teorie così generali, intervengono a perfezionare, nelle loro linee fondamentali, anche l'*analisi* ordinaria *mista* di *punti* e *vettori*, ed a metterne in rilievo la *differenza* con l'*analisi vettoriale pura*, prendiamo due punti

$$(14) \qquad p' = t'e + x'i + y'j + z'k \quad ; \quad p = te + xi + yj + zk$$

dei quali supponiamo essere p' funzione di p, ammettente almeno le derivate prime; e dove e rappresenta un punto unitario fisso ed i, j. k i tre vettori unitarî soliti di Hamilton costituenti un sistema destrorso. Avremo

$$(15) \qquad G_{|p}\, p' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial t'}{\partial t};$$

ed in accordo a quanto si è detto in **c**), **d**) precedente, per essere $n = 3$, $\varrho = 1$:

$$(16) \qquad G_p | p' = -\left(\frac{dx'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = \nabla_p p'.$$

Se p fosse un vettore $u = xi + yj + zk$, senza esserlo p', si avrebbe:

$$(17) \qquad G_{|u}\, p' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} + \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{t=0} \quad \text{e} \quad G_u | p' = - G_{|u}\, p' = \nabla_u p'.$$

Se fosse p' un vettore $u' = x'i + y'j + z'k$ essendolo, o non, p, si avrebbe invece

$$(18) \qquad G_{|p}\, u' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} \; ; \; G_p | u' = \nabla_p u' = -\left(\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z}\right)$$

Se i due vettori u, u', invece che *valori* particolari di variabili estensive in uno spazio *misto* di punti e vettori, fossero variabili generiche di uno spazio *vettoriale puro*, per essere in tal caso $n = 2$, $\varrho = 1$, in accordo a quanto si è detto in **c**), **d**):

$$(19) \qquad \nabla_u u' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} \quad ; \quad G_u | u' = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = G_{|u}\, u'$$

diversamente da come è significato dalle (18).