ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Sui nuclei periodici di Evans e la composizione di seconda specie.* Nota I di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

1. In una recente Memoria il prof. I. G. Evans ha studiato le equazioni di Fredholm:

$$(1) \qquad \varphi(x) + \lambda \int_0^1 n(xy)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

nell'ipotesi che il nucleo n sia della forma

$$n(x \pm y),$$

e sia una funzione periodica, a periodo eguale all'intervallo di integrazione.

In questa Nota mi propongo di riprendere, generalizzandoli, lo studio di tali nuclei, dal punto di vista della composizione di seconda specie. La soluzione dell'equazione (1) ne viene di conseguenza, in uno coi risultati ottenuti dall'Evans.

Devo al mio Maestro prof. Volterra l'osservazione che due nuclei di Evans

$$m(x - y) \quad , \quad n(x - y)$$

sono sempre permutabili. Tale osservazione è capitale, poichè permette di estendere tutta la teoria del gruppo del ciclo chiuso.

2. Cominciamo dal considerare i nuclei della forma

$$n(ax - by)$$

ove la n sia una funzione periodica del suo argomento, a periodo eguale all'intervallo d'integrazione, ed a, b sieno interi; operiamo su essi mediante composizione di seconda specie.

Chiameremo tali nuclei: *nuclei di Evans della classe* (a, b).

Si può allora enunciare il

TEOREMA I. — *La composizione di due nuclei di Evans della classe* (a, b) *e della classe* (α, β) *dà due nuclei di Evans delle classi rispettive* $\left(\frac{a\alpha}{d_1}, \frac{b\beta}{d_1}\right); \left(\frac{a\alpha}{d_2}, \frac{b\beta}{d_2}\right)$, *ove* d_1, d_2 *sono i massimi comun divisori rispettivi delle coppie* $\alpha, b; a, \beta$.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

Infatti, uno dei due nuclei risultanti dalla composizione è

$$\overset{\times\times}{m}\ \overset{\times\times}{n} = \nu(x\,,y) = \int_0^1 m(ax - bs)\, n(\alpha s - \beta y)\, ds\,.$$

Mutiamo ora ax in $ax + \frac{bh}{d_1}$; βy in $\beta y + \frac{\alpha h}{d_1}$; nell'ipotesi che sieno $\alpha\,,\beta$ differenti da zero, avremo

$$\nu\left(x + \frac{b}{ad_1}h\,,y + \frac{\alpha}{\beta d_1}h\right) = \int_0^1 m\left(ax + \frac{bh}{d_1} - bs\right) n\left(\alpha s - \frac{\alpha h}{d_1} - \beta y\right) ds\,.$$

In quest'ultimo integrale mutiamo a sua volta s in $\sigma + \frac{h}{d_1}$; sarà $ds = d\sigma$, mentre i limiti superiore ed inferiore dell'integrale diventeranno $1 + \frac{h}{d_1}$, $\frac{h}{d_1}$; avremo cioè

$$\nu\left(x + \frac{b}{ad_1}h\,,y + \frac{\alpha}{\beta d_1}h\right) = \int_{\frac{h}{d_1}}^{1+\frac{h}{d_1}} m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma\,.$$

Per le proprietà degli integrali, questo si può scrivere anche

$$\nu\left(x + \frac{b}{ad_1}h\,,y + \frac{\alpha}{\beta d_1}h\right) =$$

$$= \int_0^1 m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma + \int_1^{1+\frac{h}{d_1}} m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma -$$

$$- \int_0^{\frac{h}{d_1}} m(ax - b\sigma)\, n(\alpha\sigma - \beta y)\, d\sigma\,.$$

Ora, tenuto conto della periodicità di m ed n, e del fatto che $b\,,\alpha$ sono interi, avremo

$$m(ax - b\sigma') = m(ax - b\sigma'')$$
$$n(\alpha\sigma' - \beta y) = n(\alpha\sigma'' - \beta y)$$

ove

$$0 < \sigma' < \frac{h}{d_1} \quad ; \quad \sigma'' = 1 + \sigma'.$$

Quindi gli ultimi due integrali scritti sono eguali e la loro differenza è nulla.

Resta dunque

$$v\left(x+\frac{b}{ad_1}h\,,\,y+\frac{\alpha}{\beta d_1}h\right)=\int_0^1 m(ax-b\sigma)\,n(\alpha\sigma-\beta y)\,d\sigma=v(x\,,\,y)\,;$$

il che implica, come si vede facilmente,

$$v(x\,,\,y)=v\left(\frac{a\alpha}{d_1}x-\frac{b\beta}{d_1}y\right).$$

Mutiamo ora x in $x+\frac{1}{a}$; avremo

$$v\left(\frac{\alpha}{d_1}x-\frac{b\beta}{d_1}y+\frac{\alpha}{d_1}\right)=$$

$$=\int_0^1 m\left(a\left(x+\frac{1}{a}\right)-b\sigma\right)n(\alpha\sigma-\beta y)\,d\sigma=\int_0^1 m(ax-b\sigma+1)\,n(\alpha\sigma-\beta y)\,\delta\sigma,$$

ed essendo la m funzione a periodo 1, sarà $m(ax-b\sigma+1)=m(ax-b\sigma)$, da cui si trae

$$v\left(\xi+\frac{\alpha}{d_1}\right)=v(\xi)\quad,\quad \xi=\frac{\alpha}{d_1}x-\frac{b\beta}{d_1}y\,.$$

In modo analogo, col cambiamento di y in $y+\frac{1}{\beta}$ si otterrebbe

$$v\left(\xi+\frac{b}{d_1}\right)=v(\xi)\,.$$

Cioè la funzione $v(\xi)$ ha i due periodi $\frac{\alpha}{d_1}$ e $\frac{b}{d_1}$. Essa avrà quindi più generalmente il periodo

$$e_1\frac{\alpha}{d_1}+e_2\frac{b}{d_1}$$

con e_1 ed e_2 interi positivi o negativi.

Intanto gli interi $\frac{\alpha}{d_1}$, $\frac{\beta}{d_1}$ sono primi fra loro; quindi si potranno determinare sempre gli interi e_1, e_2 in modo tale che

$$e_1\frac{\alpha}{d_1}+e_2\frac{b}{d_1}=1;$$

cioè la funzione $v(\xi)$ sarà periodica, a periodo 1.

Tenuto conto che $\xi = \frac{a\alpha}{d_1}\, x - \frac{b\beta}{d_1}\, y$, si vede allora che effettivamente essa è un nucleo di Evans della classe $\left(\frac{a\alpha}{d_1}, \frac{b\beta}{d_1}\right)$.

Un ragionamento identico si farebbe per il prodotto di composizione $\overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{m}$.

Noi abbiamo supposto che a, β siano diversi da zero. Se però, ad es., fosse $a = 0$, sarebbe

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = \nu = \int_0^1 m(-bs)\, n(\alpha s - \beta y)\, ds$$

che è funzione di βy, ed è anche a periodo 1. Se poi fossero $a = \beta = 0$, allora risulterebbe

$$\nu = \overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = \text{costante},$$

ed a maggior ragione appartiene ai nuclei di Evans.

Si converrà quindi che se $a = 0$, $\beta \neq 0$, sia $d_1 = \beta$; se $a \neq 0$, $\beta = 0$ $d_1 = \alpha$; e se $\alpha = \beta = 0$ anche $d_1 = \alpha = \beta = 0$.

3. In generale, due nuclei di Evans non sono permutabili.

Consideriamo, ad esempio, i due nuclei:

$$m = \cos 2\pi(x - 2y) \quad ; \quad n = \cos 2\pi(3x - y).$$

Avremo, applicando note formole di trigonometria,

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 \cos 2\pi(x - 2s) \cos 2\pi\,(3s - y)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int_0^1 \cos 2\pi(x - y + s)\, ds + \int_0^1 \cos 2\pi(s - x - y)\, ds \right\};$$

e ponendo nel primo integrale $s = t - (x - y)$, e nel secondo $s = u + {} + x + y$, avremo

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} + \frac{1}{2}\left\{ \int_{x-y}^{1+x-y} \cos(2\pi t)\, dt + \int_{-(x+y)}^{1-(x+y)} \cos(2\pi u)\, du \right\},$$

e per la periodicità delle funzioni:

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^1 \cos(2\pi t)\, dt + \int_0^1 \cos(2\pi u)\, du \right\} = 0.$$

Invece, avremo

$$\overset{\times\times}{n}\;\overset{\times\times}{m} = \int_0^1 \cos 2\pi(3x - s) \cos 2\pi(s - 2y)\, ds =$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \cos 2\pi(3x - 2y)\, ds + \int_0^1 \cos 2\pi(3x + 2y - 2s)\, ds \right\}.$$

Ora, si vede che il secondo integrale è nullo; dunque resta

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = 0$$

$$\overset{\times\times}{n}\;\overset{\times\times}{m} = \tfrac{1}{2} \cos 2\pi(3x - 2y).$$

Si può osservare che i nuclei di classe (a, b) coincidono con quelli di classe $(-a, -b)$, e comprendono quelli di classe $a\varrho$, $b\varrho$ ove ϱ sia intero.

Teorema II. — *I nuclei di Evans di classe* $(1, 1)$ *sono tutti permutabili fra loro (teorema del prof. Volterra).*

Infatti, se in

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 m(x - s)\, n(s - y)\, ds\,;$$

poniamo $s = -t + y + x$; $ds = -dt$; i limiti superiore ed inferiore dell'integrale diventano rispettivamente $-1 + y + x$ e $y + x$. Quindi risulta:

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = -\int_{y+x}^{-1+y+x} m(x + t - y - x)\, n(-t + y + x - y)\, dt =$$

$$= \int_{y+x-1}^{y+x} n(x - t)\, m(t - y)\, dt\,,$$

ed essendo le n, m periodiche e l'integrale esteso ad un intervallo d'ampiezza eguale al periodo, sarà anche:

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 n(x - t)\, m(t - y)\, dt = \overset{\times\times}{n}\;\overset{\times\times}{m}.$$

Teorema III. — *Due nuclei di classe* $(1, -1)$ *sono permutabili fra loro, se sono ambedue funzioni pari, o ambedue funzioni dispari.*

Infatti scriviamo

$$\overset{\times\times}{m}\;\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 m(x + s)\, n(s + y)\, ds\,;$$

e poniamo $s = -\sigma - x - y$; avremo $ds = -d\sigma$, mentre i limiti superiore ed inferiore dell'integrale diventano $-1-x-y$, $-x-y$. Quindi

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = -\int_{-x-y}^{-1-x-y} m(-y-\sigma)\,n(-\sigma-x)\,d\sigma .$$

E per le ipotesi fatte:

$$m(-y-\sigma) = \pm\, m(\sigma+y)\ ,\ n(-\sigma-x) = \pm\, n(\sigma+x)\,.$$

Quindi, tenendo conto della periodicità:

$$\overset{\times}{m}\,\overset{\times}{n} = -(\pm 1)^2 \cdot \int_{-x-y}^{-1-x-y} n(x+\sigma)\,m(\sigma+y)\,d\sigma = -\int_1^0 n(x+\sigma)\,m(\sigma+y)\,d\sigma,$$

ed invertendo i limiti,

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = \int_0^1 n(x+\sigma)\,m(\sigma+y)\,d\sigma = \overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{m}\,.$$

In modo analogo si dimostrerebbe il

Teorema IV. — *Se di due nuclei di classe* $(1,-1)$, *uno è funzione pari e l'altro funzione dispari, sarà*

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = -\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n}\,.$$

Si può anche enunciare il

Teorema V. — *Se il nucleo* n *è di classe* $(1,-1)$, *ed il nucleo* m *è di classe* $(1,1)$ *ed è di classe pari, allora essi sono permutabili; se invece* m *è di classe dispari, allora*

$$\overset{\times\times}{m}\,\overset{\times\times}{n} = -\overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{m}\,.$$

Infatti, basta porre

$$s = \sigma + x - y\ ;\ x - s = (\sigma - y)\ ;\ y + s = x + \sigma$$

ed operare le solite trasformazioni nell'integrale.