ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI [1].

Le 27 rette e i 45 piani tritangenti di una superficie del terzo ordine formano notoriamente una configurazione $(27_5, 45_3)$, cioè sono tali che sopra ognuno dei piani stanno tre delle rette e per ciascuna delle rette passano cinque dei piani. Godono inoltre di queste due proprietà:

1°) se due delle 27 rette sono incidenti, il loro piano contiene un'altra delle rette, epperò è uno dei 45 piani tritangenti;

2°) se una delle rette e uno dei piani non si appartengono, il loro punto comune giace sopra una delle tre rette contenute nel piano.

Le stesse due proprietà spettano altresì, com'è pure notissimo, alla configurazione $(15_3, 15_3)$ formata dalle 15 rette di una superficie cubica che rimangono levando quelle di una bissestupla, e dai 15 piani che le contengono a tre a tre.

Essendomi proposto di ricercare in che modo le proposizioni precedenti si possano invertire, sono stato condotto a considerare una configurazione di rette e di piani definita come segue.

Si abbiano x rette (di cui tre qualunque non passanti per uno stesso punto) ed y piani, tali che su ognuno dei piani giacciano n delle rette e per ognuna delle rette passino k dei piani: rette e piani formanti dunque una configurazione (x_k, y_n). E si suppongano inoltre soddisfatte le due condizioni:

(I) *se due delle x rette stanno in un piano, questo sia un piano della configurazione, epperò contenga altre $n-2$ delle rette;*

(II) *se una delle x rette ed uno degli y piani non si appartengono, il loro punto d'incontro giaccia sopra una delle n rette poste sul piano.*

Accennati brevemente i casi, di scarso interesse, in cui n o k abbiano il valore 1 o il valore 2, in questa Nota comunico alcune osservazioni generali sulle configurazioni testè definite, e dimostro che le rette di una tale configurazione appartengono tutte ad una superficie d'ordine n [2].

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1916.

[2] Di superficie contenenti un numero finito di rette semplici si è occupato il sig. Affolter in due lavori: *Ueber Gruppen gerader Linien auf Flächen höherer Ordnung*, Math. Ann., Bd. 27 (1886), pag. 277; Bd. 29 (1887), pag. 1, nel primo dei quali si tratta delle configurazioni qui considerate. L'Autore però parte senz'altro dalla presupposizione che esista una superficie algebrica, la quale contenga un numero finito di rette presen-

In una Nota successiva proverò che per $n=3$ sono possibili soltanto i due casi ricordati in principio, dovuti alle superficie del terz'ordine.

Delle superficie che s'incontrano per $n > 3$, e delle estensioni agli iperspazii, spero di potermi occupare tra breve.

1. Anzitutto si ha, com'è ovvio,

$$kx = ny .$$

Una seconda relazione tra i numeri x, y, n, k si deduce dalle ipotesi (I) e (II). Infatti, per la (I), ognuna delle x rette ne taglia altre $k(n-1)$, situate ad $n-1$ ad $n-1$ sui k piani passanti per la retta. Considerando poi uno qualunque degli y piani, per ciascuna delle sue n rette passano altri $k-1$ piani, ognuno dei quali contiene altre $n-1$ rette. Per la (II) si ottengono così tutte le rette della configurazione, epperò

$$(n-1) \,.\, n(k-1) + n = x .$$

Con questa e la precedente, risultano le due formole

$$x = n[(n-1)(k-1)+1] , \tag{1}$$
$$y = k[(n-1)(k-1)+1] . \tag{2}$$

I casi, in cui l'uno o l'altro dei numeri k, n ha il valore 1 o il valore 2, si trattano subito, sia direttamente, sia col mezzo delle (1) e (2).

Se $k=1$, segue $x=n$, $y=1$, e la configurazione consta di un unico piano e di un numero qualunque di rette tracciate su esso.

Se $k=2$, si ha $x=n^2$, $y=2n$, e la configurazione è formata da due gruppi di n piani ciascuno, e dalle n^2 rette in cui i piani dell'un gruppo incontrano i piani dell'altro.

Per $n=1$, si ha $x=1$, $y=k$, e la configurazione si riduce ad una sola retta e ad un numero qualunque di piani passanti per essa.

Se $n=2$, segue $x=2k$, $y=k^2$: supposto $k>2$ per non ricadere in casi precedenti, la configurazione consta di $2k$ generatrici di una superficie del second'ordine, di cui k appartenenti all'una schiera e k all'altra, e dei k^2 piani che sono determinati dalle generatrici dell'un gruppo con quelle dell'altro.

Nel seguito potremo dunque supporre

$$n \geq 3 \;,\; k \geq 3 \;,\; \text{epperò} \;\; x \geq 15 \;,\; y \geq 15 . \tag{3}$$

2. Siano $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ le rette della configurazione contenute in un piano π_1 di questa. Per ciascuna di esse passano altri $k-1$ piani della

tanti una configurazione di quella natura, e si limita ad alcune proprietà relative soprattutto a diversi aggruppamenti che si possono formare con le rette ed i piani della configurazione.

configurazione, sicchè, contando anche π_1, si hanno in tutto $n(k-1)+1$ piani distinti della medesima. Questo numero non può dunque superare y; ma non può nemmeno essergli eguale, perchè se si avesse

$$n(k-1)+1 \geq y,$$

per la (2) seguirebbe l'assurdo

$$(n-1)(k-1)^2 \leq 0.$$

Ciò significa che, *se si fissa un piano qualunque della configurazione, esiste qualche altro piano di essa che non ha in comune col primo alcuna retta della configurazione.*

Sia π_2 uno dei piani non secanti π_1 in una retta della configurazione, e siano $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$ le sue rette. Per la proprietà (II), ognuna di queste deve secare una delle rette di π_1. Se ad esempio a_{21} incontra a_{11}, la a_{22} non potrà essa pure incontrare a_{11}, altrimenti a_{11}, secando (per ipotesi, in punti distinti) due rette di π_2, sarebbe comune ai piani π_1 e π_2. Si può dunque supporre ad es. che $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$ taglino risp. $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$.

Per la proprietà (I), i piani

$$\sigma_1 \equiv a_{11}\, a_{21}\,,\ \sigma_2 \equiv a_{12}\, a_{22}\,,\ \dots,\ \sigma_n \equiv a_{1n}\, a_{2n}$$

appartengono alla configurazione, quindi ciascuno contiene altre $n-2$ rette di essa, che diremo ordinatamente

$$\begin{array}{l} a_{31}\,,\ a_{41}\,,\ \dots,\ a_{n1}\ ; \\ a_{32}\,,\ a_{42}\,,\ \dots,\ a_{n2}\ ; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{3n}\,,\ a_{4n}\,,\ \dots,\ a_{nn}\,. \end{array}$$

Tutte queste rette sono distinte tra loro e dalle precedenti contenute in π_1 e π_2. Infatti, in primo luogo, se per es. a_{31} coincidesse con a_{22}, i piani π_2 e σ_1, avendo in comune anche la retta a_{21}, coinciderebbero, quindi π_1 e π_2 avrebbero in comune la retta a_{11}. In secondo luogo, se p. es. a_{31} e a_{32} fossero una medesima retta, questa, tagliando a_{11} e a_{12}, giacerebbe su π_1, e tagliando a_{21} e a_{22}, giacerebbe su π_2, sicchè π_1 e π_2 si taglierebbero in una retta della configurazione.

Dico inoltre che, fissati due qualunque dei piani $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, ognuna delle $n-2$ nuove rette ottenute sull'uno taglia una (sola) delle $n-2$ nuove rette ottenute sull'altro. Ad es. la a_{31} deve incontrare una delle a_{32}, $a_{42}, \dots, a_{n2}$. Infatti, in caso contrario, per la proprietà (II), essa taglierebbe σ_2 o su a_{12} o su a_{22}, p. es. su a_{12}. Ma allora a_{31}, tagliando pure a_{11}, starebbe sul piano π_1, quindi coinciderebbe con una delle $a_{13}, a_{14}, \dots, a_{1n}$, ciò che dimostrammo assurdo. Non può poi accadere che a_{31} incontri due rette di σ_2, altrimenti starebbe su σ_2, e, contro ciò che precede, coinciderebbe con una delle rette della configurazione poste in questo piano.

Tenuto conto delle (3), la configurazione possiede certamente, oltre le n^2 rette fin qui considerate, altre rette, cioè si ha $x > n^2$. Poichè se fosse $x = n^2$, dalla (1) deriverebbe l'assurdo

$$(n-1)(k-2) = 0 .$$

3. Le osservazioni precedenti dànno modo di ordinare le rette della configurazione in uno schema, a cui si può ricorrere con vantaggio nello studio della configurazione stessa [1].

Anzitutto è lecito supporre che nello specchio

$$(4) \qquad \left|\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{array}\right| ,$$

nel quale le rette di ogni verticale, come pure quelle delle due prime orizzontali, sono in un piano, la a_{31} tagli ciascuna delle $a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}$; e così a_{41} tagli ciascuna delle $a_{42}, a_{43}, \dots, a_{4n}$; ...; e a_{n1} tagli ciascuna delle $a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nn}$.

Presa poi a_{21}, gli altri $k-2$ piani che, oltre a π_2 e σ_1, passano per essa contengano ancora rispettivamente le $n-1$ rette

$$\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}, a_{23}^{(1)}, \dots, a_{2n}^{(1)} ; \\ a_{22}^{(2)}, a_{23}^{(2)}, \dots, a_{2n}^{(2)} ; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{22}^{(k-2)}, a_{23}^{(k-2)}, \dots, a_{2n}^{(k-2)} ; \end{array}$$

e le denominazioni di tali rette su ciascun piano siano scelte in modo che, conformemente alla proprietà (II), $a_{22}^{(i)}, a_{23}^{(i)}, \dots, a_{2n}^{(i)}$ incontrino rispettivamente $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ $(i = 1, 2, \dots, k-2)$. Nel piano $a_{2j}^{(i)} a_{1j}$ $(i = 1, 2, \dots, k-2; j = 2, 3, \dots, n)$ le rette rimanenti della configurazione siano $a_{3j}^{(i)}$, $a_{4j}^{(i)}, \dots, a_{nj}^{(i)}$, essendo i loro simboli scelti in modo che le rette stesse incontrino rispettivamente $a_{31}, a_{41}, \dots, a_{n1}$.

[1] Esso mi ha già servito a darmi tutte le configurazioni possibili per $n = 4$, e alcune di quelle rispondenti a $k = 3$.

Risultano così, in aggiunta allo specchio (4), altri $k-2$ specchi, di cui uno qualunque è

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^{(i)} & a_{23}^{(i)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}^{(i)} \\ a_{31} & a_{32}^{(i)} & a_{33}^{(i)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3n}^{(i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2}^{(i)} & a_{n3}^{(i)} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}^{(i)} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-2),$$

ed in essi, come in (4), mentre le rette di ciascuna verticale e quelle delle prime due orizzontali appartengono ad un piano, le rette che nella terza, quarta, ..., ultima orizzontale seguono rispettivamente $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$ si appoggiano appunto rispettivamente a queste ultime. Sono così poste in evidenza, nelle singole orizzontali di posti $3, 4, \ldots, n$ di (4) e (5), tutte le rette della configurazione che, insieme con quelle del piano σ_1, incontrano rispettivamente $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$.

A completare il quadro delle rette della configurazione mancano soltanto le rette che sono contenute negli altri piani (oltre che π_1 e σ_1) passanti per a_{11}.

Ben inteso, perchè la configurazione possa dirsi determinata, occorrerà in ogni caso particolare conoscere quali siano gli incontri delle sue rette, da aggiungersi a quelli che già furono indicati.

4. *Le rette della configurazione appartengono tutte ad una* (**sola**) *superficie irriducibile, non rigata, d'ordine* n.

Dimostriamo anzitutto che per le n^2 rette del quadro (4) passa un fascio di superficie d'ordine n. Tenendo conto degli incontri di quelle rette, il passaggio d'una superficie d'ordine n per le $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ importa (al più)

$$(n+1) + n + \cdots + 3 + 2 = \binom{n+2}{2} - 1$$

condizioni lineari; il successivo passaggio per $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ ne importa (al più) altre

$$n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \binom{n+1}{2};$$

il successivo passaggio per $a_{31}, a_{41}, \ldots, a_{n1}$ (al più) altre

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 = \binom{n}{2} - 1,$$

ed il successivo passaggio per $a_{32}, a_{42}, \ldots, a_{n2}$ (al più) altre

$$(n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 = \binom{n-1}{2}.$$

Tenendo poi conto che negli $n-2$ gruppi

$$a_{33}\,, a_{43}\,, \ldots\,, a_{n3}\ ;\ a_{34}\,, a_{44}\,, \ldots\,, a_{n4}\ ; \ldots ;\ a_{3n}\,. a_{4n}\,, \ldots\,, a_{nn}$$

ogni retta di ciascun gruppo deve incontrare una (sola) retta di ogni altro gruppo, risulta che i passaggi della superficie per le rette di questi gruppi importano altre condizioni al più risp in numero di

$$(n-3)+(n-4)+\cdots+1=\binom{n-2}{2},$$

$$(n-4)+(n-4)+\cdots+1=\binom{n-3}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2+1=\binom{3}{2},$$

$$1=\binom{2}{2}.$$

Sommando tutti i numeri trovati, risulta che il numero delle condizioni imposte è al più

$$\binom{n+3}{3}-2.$$

Ma è chiaro che il sistema lineare di superficie così determinato non può avere dimensione superiore all'unità, quindi è un fascio.

Se ora fissiamo una qualunque delle rette della configurazione escluse dal quadro (4), per la proprietà (II) essa incontra n rette di questo quadro, situate ad una ad una sui piani $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Perciò esiste nel fascio precedente una ed una sola superficie che passa anche per quella retta; ed è facile verificare, tenendo conto della proprietà (II), che alla superficie appartengono anche le rimanenti rette della configurazione.

Che la superficie non possa decomporsi in altre due F'. F'', di ordini n', n'' (con $n'+n''=n$), si desume da ciò, che in caso contrario ad es. a_{11} apparterrebbe ad F' e non ad F''. Ma allora anche $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$, tagliando a_{11} e non le altre rette $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}$ del piano π_1, giacerebbero su F', il che è assurdo.

La superficie, finalmente, non è rigata: chè, in tal caso, delle n rette contenute in uno qualunque degli y piani, una almeno sarebbe una direttrice, e la superficie si spezzerebbe.

5. Il teorema del num. precedente conduce facilmente [1] ad un limite superiore di k, ricordando [2] che una superficie d'ordine n non può conte-

[1] Cfr. Affolter, primo lavoro citato, pag. 283.

[2] Clebsch, *Zur Theorie der algebraischen Flächen*, Giorn. di Crelle, Bd. 58 (1861), pag. 106. Cfr. pure Salmon-Fiedler, *Anal. Geometrie des Raumes*, II Theil, 3ª edizione, Leipzig, 1880, pag. 634.

nere più di $n(11n-24)$ rette senza essere rigata. Per la (1) si ottiene infatti

$$k \leq 2\left(6 - \frac{7}{n-1}\right),$$

epperò $k \leq 11$. Più precisamente, per i valori

$$3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9\,,10\,,11\,,12\,,13\,,14$$

di n, i massimi valori di k sono rispettivamente

$$5\,,7\,,8\,,9\,,9\,,10\,,10\,,10\,,10\,,10\,,10\,,10\,,$$

mentre per $n \geq 15$ il massimo valore di k è 11.

Matematica. — *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi ad n dimensioni di Grassmann.* Nota II di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1]

Nel 1° caso, $u' = 0\,, e + x'i + y'j + z'k$, è considerato come posizione limite di un punto, e

$$\begin{aligned} |u &= 0\,.\,|e + x'\,|\,i + y'\,|\,j + z'\,|\,k \\ &= 0\,.\,ijk - x'ejk - y'eki - z'eij \end{aligned}$$

come posizione limite di un tripunto; nel 2° caso, invece,

$$u' = x'i + y'j + z'k$$

è *dato* nel trivettore ijk e

$$|u' = x'\,|\,i + y'\,|\,j + z'\,|\,k = x'jk + y'ki + z'ij$$

è un *bivettore*.

3. Dalla definizione che venne data per $\nabla_\Omega U$, $G_\Omega U$ segue, come venne già osservato, sia U scalare sia estensiva, che ∇_Ω e G_Ω sono *distributivi* rispetto all'addizione. Che cosa avviene pel ∇_Ω e del G_Ω di un prodotto? La risposta riesce più facile cercandola per gli hamiltoniani e gradienti elementari in grazia delle (5″) e (6″) della *Npr.*

Devonsi distinguere diversi casi, e questi sono i seguenti:

a) 1° caso, *Le funzioni* U, V *che compongono il prodotto* U . V *sono entrambe scalari*. In tal caso si ha, evidentemente,

$$\frac{\partial UV}{\partial\omega_i}\,|\,E_i = \left(\frac{\partial U}{\partial\omega_i}\,V + U\,\frac{\partial V}{\partial\omega_i}\right)|\,E_i = \frac{\partial U}{\partial\omega_i}\,|\,E_i\,.\,V + \frac{\partial V}{\partial\omega_i}\,|\,E_i\,.\,U\,;$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.