ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

nere più di $n(11n - 24)$ rette senza essere rigata. Per la (1) si ottiene infatti

$$k \leq 2\left(6 - \frac{7}{n-1}\right),$$

epperò $k \leq 11$. Più precisamente, per i valori

$$3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,7\,,\,8\,,\,9\,,\,10\,,\,11\,,\,12\,,\,13\,,\,14$$

di n, i massimi valori di k sono rispettivamente

$$5\,,\,7\,,\,8\,,\,9\,,\,9\,,\,10\,,\,10\,,\,10\,,\,10\,,\,10\,,\,10\,,\,10\,,$$

mentre per $n \geq 15$ il massimo valore di k è 11.

Matematica. — *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi ad n dimensioni di Grassmann.* Nota II di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1]

Nel 1° caso, $u' = 0\,, e + x'i + y'j + z'k$, è considerato come posizione limite di un punto, e

$$\begin{aligned} |u &= 0\,.\,|e + x'\,|\,i + y'\,|\,j + z'\,|\,k \\ &= 0\,.\,ijk - x'ejk - y'eki - z'eij \end{aligned}$$

come posizione limite di un tripunto; nel 2° caso, invece,

$$u' = x'i + y'j + z'k$$

è *dato* nel trivettore ijk e

$$|u' = x'|i + y'|j + z'|k = x'jk + y'ki + z'ij$$

è un *bivettore*.

3. Dalla definizione che venne data per $\nabla_\Omega U$, $G_\Omega U$ segue, come venne già osservato, sia U scalare sia estensiva, che ∇_Ω e G_Ω sono *distributivi* rispetto all'addizione. Che cosa avviene pel ∇_Ω e del G_Ω di un prodotto? La risposta riesce più facile cercandola per gli hamiltoniani e gradienti elementari in grazia delle (5″) e (6″) della *Npr.*

Devonsi distinguere diversi casi, e questi sono i seguenti:

a) 1° caso, *Le funzioni* U, V *che compongono il prodotto* U . V *sono entrambe scalari.* In tal caso si ha, evidentemente,

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i}\,|\,E_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i}\,V + U\,\frac{\partial V}{\partial \omega_i}\right)|\,E_i = \frac{\partial U}{\partial \omega_i}\,|\,E_i\,.\,V + \frac{\partial V}{\partial \omega_i}\,|\,E_i\,.\,U\,;$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

epperò, moltiplicando per $(-1)^{\rho\rho'}$ e sommando da $i=1$ ad $i=m$, si ha pure:

$$\nabla_\Omega(UV) = \nabla_\Omega U . V + U . \nabla_\Omega V . \tag{20}$$

In modo consimile si avrà pure:

$$G_\Omega(UV) = G_\Omega U . V + U . G_\Omega V ; \tag{21}$$

vale a dire, *nel caso in esame* ∇_Ω e G_Ω *si comportano come se fossero derivate ordinarie.*

b) 2° caso. *Una delle funzioni* U, V, *per es.* U, *è scalare, e l'altra* V *estensiva d'ordine* σ. Questo caso si scinde in due: α) quello in cui $\sigma + \varrho' \leq n+1$; β) quello in cui $\sigma + \varrho' \geqq n+1$. Siccome in entrambi questi sotto-casi

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i} \,|\, E_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i} V + U \frac{\partial V}{\partial \omega_i}\right) |\, E_i = \frac{\partial U}{\partial \omega_i} . V \,|\, E_i + U . \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \,|\, E_i , \tag{22}$$

così, quando $\sigma + \varrho' \leq n+1$, essendo

$$V \,|\, E_i = (-1)^{\sigma\rho'} \,|\, E_i . V ,$$

sarà

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i} \,|\, E_i = (-1)^{\sigma\rho'} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \,|\, E_i . V + U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \,|\, E_i ;$$

e quando $\sigma + \varrho' \geqq n+1$, essendo

$$V \,|\, E_i = (-1)^{\rho\sigma'} \,|\, E_i . V ,$$

sarà

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i} \,|\, E_i = (-1)^{\rho\sigma'} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \,|\, E_i . V + U . \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \,|\, E_i .$$

Sommando da $i=1$ ad $i=m$, dopo aver moltiplicato per $(-1)^{\rho\rho'}$, si avrà:

$$\nabla_\Omega(UV) = (-1)^{\rho'\sigma} \nabla_\Omega U . V + U . \nabla_\Omega V \tag{23}$$

quando $\sigma + \varrho \leq n+1$, e

$$\nabla_\Omega(UV) = (-1)^{\rho\sigma'} \nabla_\Omega U . V + U . \nabla_\Omega V \tag{24}$$

quando $\sigma + \varrho' \geqq n+1$.

Analogamente, per essere

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i} E_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i} V + U \frac{\partial V}{\partial \omega_i}\right) E_i = \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \cdot VE_i + U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} E_i ; \tag{22'}$$

siccome, corrispondentemente ai casi $\sigma + \varrho \leq n + 1$ e $\sigma + \varrho \geqq n + 1$, si ha $VE_i = (-1)^{\varrho\sigma} E_i V$ e $VE_i = (-1)^{\varrho'\sigma'} E_i V$, così sarà:

$$\frac{\partial UV}{\partial \omega_i} E_i = (-1)^{\varrho\sigma} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i . V + U . \frac{\partial V}{\partial \omega_i} E_i$$

se $\sigma + \varrho \leq n + 1$, e

$$\frac{\partial (UV)}{\partial \omega_i} E_i = (-1)^{\varrho'\sigma'} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i . V + U . \frac{\partial V}{\partial \omega_i} E_i$$

se $\sigma + \varrho \geqq n + 1$.

Sommando da $i = 1$ ad $i = m$, si avrà in fine:

(25) $$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho\sigma} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V$$

quando $\sigma + \varrho \leq n + 1$, e

(26) $$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho'\sigma'} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V$$

quando $\sigma + \varrho \geqq n + 1$. Così, a parte il segno del primo termine, la regola rimane come nel 1° caso.

c) 3° caso. *Le funzioni* U , V *sono entrambe estensive, e (supp.) d'ordine* σ , τ *rispettivamente*. Anche questo caso si scinde in due sotto-casi: α) quello nel quale $\frac{\partial U}{\partial \omega_i} V | E_i$, $U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} | E_i$ siano prodotti *puri*; il che avviene per entrambi nelle medesime circostanze, perchè $\frac{\partial U}{\partial \omega_i}$ e $\frac{\partial V}{\partial \omega_i}$ sono, come U , V funzioni estensive di ordine σ , τ rispettivamente, cioè quando si abbia

(27) $$\sigma + \tau + \varrho' \leq n + 1 \quad \text{o} \quad \sigma + \tau + \varrho' \geqq 2(n + 1);$$

β) quello nel quale i suddetti prodotti siano *misti*.

Nel sottocaso α) si può scrivere la (22), col nuovo significato per la U; epperò, ragionando come si fece per arrivare alle (23), (24), si trova, allorchè si verifichino le (27), corrispondentemente:

(23′) $$\nabla_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho'\tau} \nabla_\Omega U . V + U . \nabla_\Omega V$$

(24′) $$\nabla_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho\tau'} \nabla_\Omega U . V + U . \nabla_\Omega V .$$

Analogamente, se

$$\sigma + \tau + \varrho \leq n + 1 , \quad \text{o} \quad \sigma + \tau + \varrho \geqq 2(n + 1),$$

si potrà scrivere la (22′), e quindi pure le analoghe delle (25), (26), cioè le

(25′) $$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho\tau} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V$$

(26′) $$G_\Omega (UV) = (-1)^{\varrho'\tau'} G_\Omega U . V + U . G_\Omega V .$$

Dalle (23'), (24'), (25'), (26') si scorge che, nel sottocaso α), la U si comporta come se fosse una funzione scalare.

[Per dare un esempio semplice che servac ontemporaneamente di verifica per qualcuna delle formule precedenti, supponiamo che U, V siano due bivettori, nel trivettore ordinario ijk. di cui nell'es. 2, e); e si abbia

$$(28)\qquad U = u.jk + v.ki + w.ij \quad , \quad V = X.jk + Y.ki + Z.ij .$$

Sia poi $\Omega = x.i + y.j + z.k$ un vettore rispetto al quale si voglia l'hamiltoniano del prodotto UV. Nel caso presente è: $n+1=3$, $\sigma=2$, $\sigma'=1$, $\tau=2$, $\tau'=1$, $\varrho=1$, $\varrho'=2$; per cui è pure: $\sigma+\tau+\varrho'= = 2+2+2=2.3=2(n+1)$, conforme alla (27) a dritta. Ne segue che la formula (24') è da applicarsi; e si avrà:

$$(29)\qquad \nabla_\Omega(UV) = \nabla_\Omega U.V + U.\nabla_\Omega V .$$

Ora $\nabla_\Omega U = -\nabla_\Omega u.jk - \nabla_\Omega v.ki - \nabla_\Omega w.ij$, secondo la formula (19) della *Npr.* perchè $\varrho'+\sigma > n+1$, e $(-1)^{\varrho\sigma'} = -1$. Inoltre, poichè $(-1)^{\varrho\varrho'} = +1$, è pure [cfr. form. (12) della N II]:

$$(30)\qquad \nabla_\Omega \alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x}|i + \frac{\partial\alpha}{\partial y}|j + \frac{\partial\alpha}{\partial z}|k \quad \text{per} \quad \alpha = u, v, w ;$$

da cui, visto essere $|i = jk$, $|j = ki$, $|k = ij$, e

$$(31)\quad jk.ki = -ki.jk = k \ , \ ij.jk = -jk.ij = j \ , \ ki.ij = -ij.ki = i$$

segue, per Δ_Ω, l'espressione

$$(32)\qquad \nabla_\Omega U = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) k ,$$

e per $\nabla_\Omega V$ l'espressione analoga

$$(33)\qquad \nabla_\Omega V = \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) i + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) j + \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) k .$$

Se indichiamo provvisoriamente con A, B, C i coefficienti di i, j, k nella (32) e con D, E, F i coefficienti analoghi nella (33) e teniamo presente pure che $i|i = |i.i = 1$, $j|j = |j.j = 1$, $k|k = |k.k = 1$, troviamo

$$\nabla_\Omega U.V = AX + BY + CZ \quad , \quad U.\nabla V = uD + vE + wF ,$$

e quindi

$$(34)\qquad \nabla_\Omega (UV) = AX + BY + CZ + uD + vE + wF .$$

Se ora facciamo il prodotto UV, pel quale saranno tenute presenti le (31), troviamo

$$UV = (vZ - wY)\, i + (wX - uZ)\, j + (uY - vX)\, k ;$$

e per prendere l'hamiltoniano di questa espressione, si deve osservare che, essendo ora $\sigma = 1 = \varrho$, si deve applicare la (18) della *Npr.*; la quale dà, al 2° membro;

$$\nabla_\Omega(vZ - wY)\, i + \nabla_\Omega(wX - uZ)\, j + \nabla_\Omega(uY - vX)\, k\,;$$

per cui [(12) della N II] essendo $(-1)^{pp'} = +1$ e

$$\nabla_\Omega(vZ - wY).i = \frac{\partial v}{\partial x} Z - \frac{\partial w}{\partial x} Y + v \frac{\partial Z}{\partial x} - w \frac{\partial Y}{\partial x}$$

in grazia delle $i|i = 1$, $i|k = 0$, $i|j = 0$, con due altre analoghe, si troverà, dopo conveniente ordinamento:

$$\nabla_\Omega(UV) = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{dz}\right) X +$$
$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) Y + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) Z + \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) u + \cdots;$$

cioè appunto le (34)].

Il trattamento del sottocaso β), per la discussione che richiede, ed il caso non ancora enunciato nel quale con ∇_Ω e G_Ω si operi sopra *prodotti interni*, non possono trovar posto che in ulteriori comunicazioni.

Matematica. — *Derivazione ad indice qualunque*. Nota II della dott.ssa ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Corrispondente E. ALMANSI [1].

Nella Nota precedente, sotto lo stesso titolo, ho parlato del problema di definire, in forma utile e coerente con le regole del calcolo, l'operazione D^n, quando D rappresenti l'ordinaria derivazione $\frac{d}{dx}$, e l'indice n sia un numero qualunque. Ho accennato alle soluzioni proposte dai diversi autori che hanno considerato il problema, da Leibniz in poi, ho esposto il concetto che la definizione di D^n, per quanto arbitraria, deve, per rendersi praticamente utile, essere tale da soddisfare ad un insieme di condizioni più restrittivo di quelle verificate dalle varie formule proposte. In particolare è indeclinabile la condizione $D^m D^n = D^{m+n} = D^n D^m$, senza di che qualunque definizione proponibile si riduce ad una formula d'interpolazione senza reali vantaggi per il calcolo.

Distinzione però deve farsi fra la trattazione del *valore principale*, e quella del *termine complementare* (contenente le eventuali costanti arbitrarie) che si aggiunge al primo per ottenere il valore generale.

[1] Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1916.