ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

di Mg, si trovino p. e. gli atomi di Zn, qualunque sia la simmetra o sistema, a cui le strutture appartengono.

In una struttura siffatta è possibile la diffusione, come avviene nello stato amorfo? L'esperienza risolverà a suo tempo questa questione; ma intanto considerando i varî sistemi punteggiati eguali, che costituiscono le strutture dei due sali $Mg\,SO_4 + 7\,aq$ e $Zn\,SO_4 + 7\,aq$, si dovrebbe ritenere che se diffusione c'è, sarebbero gli atomi Mg e Zn, che si diffondono, ossia che si scambiano le posizioni loro; orbene una diffusione siffatta sarebbe grandissima pari alla forza osmotica proporzionale al numero degli atomi contenenti nella soluzione, cosa contradetta dalla osservazione.

Fisiologia. — *Nuove ricerche sui muscoli striati e lisci degli animali omeotermi.* IX: *Azione dei gas della respirazione sui muscoli lisci* (parte 1ª). Nota del Corrispondente FILIPPO BOTTAZZI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui nuclei periodici di Evans e la composizione di seconda specie.* Nota II di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

In questa seconda Nota continuiamo a sviluppare i risultati ottenuti nella prima.

Come corollario del teorema I della Nota I, si ha che:

1. COROLLARIO I. — *La composizione di due nuclei di Evans di classe* $(1, 1)$, *dà ancora un nucleo di classe* $(1, 1)$; *la composizione di un nucleo di classe* $(+1, -1)$ *e di uno di classe* $(1, 1)$ *dà ancora uno di classe* $(+1, -1)$; *ed infine la composizione di due nuclei di classe* $(+1, -1)$ *dà un nucleo di classe* $(1, 1)$.

Ne seguono come necessaria conseguenza i risultati enunciati dall' Evans:

COROLLARIO II. — *Se nella* (1) *il nucleo* n *è della forma* $n(x-y)$, *il nucleo risolvente è della stessa forma.*

Infatti, tutti i nuclei iterati di n sono ancora della stessa forma. Quindi, scrivendo la formula di soluzione, si vede che il nucleo risolvente è espresso proprio da una serie di funzioni di quel tipo, ed è quindi anche esso della stessa forma.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

Corollario III. — *Se nella* (1) *il nucleo* n *è della forma* $n(x+y)$, *il nucleo risolvente è della forma*

$$\nu_1(x+y)+\nu_2(x-y).$$

Ed infatti, i nuclei iterati di ordine dispari, cioè le potenze dispari di composizione, per il Corollario I, sono della forma $f(x+y)$, mentre le potenze pari sono della forma $f(x-y)$. Quindi il nucleo risolvente si spezza in due parti: una contenente tutte le potenze pari, l'altra contenente tutte quelle dispari; e resta così stabilito il corollario.

Dalla (1) segue intanto che se la $f(x)$ è funzione periodica a periodo 1, e la n è un nucleo di Evans, anche la φ è periodica ed a periodo 1; infatti, si ha

$$\varphi(x+1)+\lambda\int_0^1 n(x+1\,,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x+1)$$

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^1 n(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)\,.$$

Per la periodicità di n, $n(x+1\,,y)=n(x\,,y)$; quindi

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=f(x+1)-f(x)\,, \tag{2}$$

per cui da $f(x+1)=f(x)$ segue $\varphi(x+1)=\varphi(x)$.

Più generalmente ancora, se $n(x\,,y)=n(ax-by)$, sarà

$$\varphi\left(x+\frac{1}{a}\right)-\varphi(x)=f\left(x+\frac{1}{a}\right)-f(x)\,.$$

Dalla (2) ne segue che, in particolare, se $f(x)=0$ [cioè se la (1) diventa l'equazione omogenea], la soluzione, esistendo, deve essere periodica a periodo $\frac{1}{a}$.

Se la $f(x)$ non è a periodo 1, noi potremo sempre definire una funzione periodica $f_1(x)$, eguale ad $f(x)$ nell'intervallo $(0\,,1)$. Allora la funzione φ corrispondente sarà eguale alla φ nell'intervallo $(0,1)$, e sarà periodica: la φ è poi legata ad essa, per valori esterni a quell'intervallo, dalla (2).

È possibile assegnare *a priori* gli autovalori e le autofunzioni dei nuclei di Evans di classe $(1\,,\pm 1)$.

2. Infatti, se $n(z)$ è un nucleo di Evans, noi potremo (nell'ipotesi abituale che sia sommabile e di quadrato sommabile) porre

$$n(z) = \alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_r \cos(2\pi r z) + \sum_1^\infty \beta_r \operatorname{sen}(2\pi r z) \qquad (z = ax - by).$$

Abbiamo visto che la soluzione dell'equazione omogenea, se esiste, è anche essa periodica a periodo 1. Quindi, sotto ipotesi poco restrittive, abbiamo

$$\varphi(x) = \gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_r \cos(2\pi r x) + \sum_1^\infty \delta_r \operatorname{sen}(2\pi r x),$$

da cui

$$\gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_r \cos(2\pi r x) + \sum_1^\infty \delta_r \operatorname{sen}(2\pi r x) +$$

$$+ \lambda \int_0^1 \left\{ \alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_r \cos 2\pi\, r(ax - b\xi) + \sum_1^\infty \beta_r \operatorname{sen} 2\pi\, r(ax - b\xi) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \gamma_0 + \sum_1^\infty \gamma_r \cos 2\pi\,\xi + \sum_1^\infty \delta_r \operatorname{sen} 2\pi\,\xi \right\} ds = 0\,. \tag{3}$$

Sviluppando il prodotto sotto segno di integrale, si trovano, oltre il termine $\alpha_0\gamma_0$, termini del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_r \cos 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \gamma_s \cos 2\pi s\xi \\ \alpha_r \cos 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \delta_s \operatorname{sen} 2\pi s\xi \\ \beta_r \operatorname{sen} 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \gamma_s \cos 2\pi s\xi \\ \beta_r \operatorname{sen} 2\pi r(ax - b\xi) \cdot \delta_s \operatorname{sen} 2\pi s\xi\,. \end{array}\right.$$

Questi, per note formole di trigonometria, diventano

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\alpha_r\gamma_s[\cos 2\pi(rax - (rb - s)\xi) + \cos 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \\ \frac{1}{2}\alpha_r\delta_s[\operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb - s)\xi) - \operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \\ \frac{1}{2}\beta_r\gamma_s[\operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb - s)\xi) + \operatorname{sen} 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \\ \frac{1}{2}\beta_r\delta_s[-\cos 2\pi(rax - (rb - s)\xi) + \cos 2\pi(rax - (rb + s)\xi)] \end{array}\right. \quad r, s \text{ interi positivi arbitrarî.}$$

Integrando rispetto a ξ fra i limiti 0 ed 1, e tenuto conto della periodicità delle funzioni, si vede che tali termini dànno come risultato 0, se $(rb - s)$ ed $(rb + s)$ sono diversi da zero.

Se invece è $rb - s = 0$ (ed allora la $rb + s = 0$ non avrà soluzioni, poichè r, s sono positivi e b deve essere positivo, i quattro termini soprascritti si riducono, dopo l'integrazione, a

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,\alpha_r\,\gamma_s\,(\cos 2\,\pi\,r\,a\,x) \\ \frac{1}{2}\,\alpha_r\,\delta_s\,(\mathrm{sen}\;2\,\pi\,r\,a\,x) \\ \frac{1}{2}\,\beta_r\,\gamma_s\,(\mathrm{sen}\;2\,\pi\,r\,a\,x) \\ -\frac{1}{2}\,\beta_r\,\delta_s\,(\cos 2\,\pi\,r\,a\,x) \end{array}\right. \qquad (s = rb\,,\; b > 0)\,.$$

Se invece è $rb + s = 0$ (ed allora $b < 0$, e la $rb - s = 0$ non avrà soluzioni), avremo

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,\alpha_r\,\gamma_s\,(\cos 2\,\pi\,r\,a\,x) \\ -\frac{1}{2}\,\alpha_r\,\delta_s\,(\mathrm{sen}\;2\,\pi\,r\,a\,x) \\ \frac{1}{2}\,\beta_r\,\gamma_s\,(\mathrm{sen}\;2\,\pi\,r\,a\,x) \\ \frac{1}{2}\,\beta_r\,\delta_s\,(\cos 2\,\pi\,r\,a\,x) \end{array}\right. \qquad (s = -\,rb\,,\; b < 0)\,.$$

Quindi la (3) si scriverà

$$\gamma_r + \sum_1^\infty \gamma_r \cos 2\,\pi\,\varrho\,x + \sum_1^\infty \delta_\varrho\,\mathrm{sen}\;2\,\pi\,\varrho\,x +$$

$$+ \lambda \left\{ \alpha_0\,\gamma_0 + \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty (\alpha_r\,\gamma_s \mp \beta_r\,\delta_s) \cos 2\pi rax + \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty (\pm\,\alpha_r\,\delta_s + \beta_r\,\gamma_s)\,\mathrm{sen}\;2\pi rax \right\},$$

ove si prenda il segno superiore per $b > 0$, e l'inferiore per $b < 0$, mentre

$$s = \pm\, rb\,.$$

3. Dovendo essere identicamente nullo tale sviluppo, se ne deduce che nei primi due sommatori sono nulle tutte le γ, δ che non hanno un indice multiplo di a; se invece esso è eguale ad ha, avremo

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0 + \lambda\,\alpha_0\,\gamma_0 = 0 \\ \gamma_\varrho + \dfrac{\lambda}{2}(\alpha_r\,\gamma_s \mp \beta_r\,\delta_s) = 0 \\ \delta_\varrho + \dfrac{\lambda}{2}(\pm\,\alpha_r\,\delta_s + \beta_r\,\gamma_s) = 0 \end{array}\right. \qquad \varrho = ha\;,\; s = |rb|\,.$$

Se $a = 1$, $b = \pm 1$, se cioè il nucleo di Evans è di classe $(1, \pm 1)$, le equazioni ora scritte diventano

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0 + \lambda\,\alpha_0\,\gamma_0 = 0 \\ \gamma_r + \dfrac{\lambda}{2}(\alpha_r\,\gamma_r \mp \beta_r\,\delta_r) = 0 \\ \delta_r + \dfrac{\lambda}{2}(\pm\,\alpha_r\,\delta_r + \beta_r\,\gamma_r) = 0\,. \end{array}\right.$$

Epperò, considerando le α, β come assegnate, e le γ, δ come incognite, sarà sempre

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0 & \text{se } (1 + \lambda\alpha_0) \neq 0 \\ \gamma_0 \quad \text{qualunque} & \text{se } (1 + \lambda\alpha_0) = 0 \end{cases}$$

ed inoltre $\gamma_r = \delta_r = 0$, se

$$D_r(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\lambda}{2}\alpha_r & \mp\frac{\lambda}{2}\beta_r \\ \frac{\lambda}{2}\beta_r & 1 \pm \frac{\lambda}{2}\alpha_r \end{vmatrix} \neq 0 ;$$

mentre, se $D_r = 0$, γ_r, δ_r potranno essere diversi da zero.

Quindi, per i nuclei di Evans di classe $(1, \pm 1)$, vale il

TEOREMA VI. — *Sviluppato il nucleo $n(x \pm y)$ in serie di Fourier, ed indicati con $\alpha_0, \alpha_r, \beta_r$ i suoi coefficienti di Fourier, gli autovalori sono le radici delle equazioni di secondo grado*

$$\begin{cases} 1 + \lambda\alpha_0 = 0 \\ D_r(\lambda) \quad = 0 \end{cases} \qquad (r \geqq 1).$$

Le autofunzioni sono poi combinazioni lineari del seno e del coseno di $2\pi r_1 x, 2\pi r_2 x, \ldots$ ove

$$D_{r_1}(\lambda) = D_{r_2}(\lambda) = \cdots = 0 .$$

Se il nucleo non fosse di classe $(1, -1)$, ma di classe (a, b) ove però $a \neq \pm b$, allora dal suo sviluppo in serie trigonometrica, e da quello dei suoi iterati — i quali sono rispettivamente delle classi

$$\left(\frac{a^2}{d_1}, \frac{b^2}{d_1}\right), \left(\frac{a^3}{d_1}, \frac{b^3}{d_1}\right), \ldots —$$

si deduce che tutte le tracce dei nuclei iterati sono nulle, se è nulla la costante α_0; oppure sono legate dalla relazione

$$n_p = \alpha_0 \cdot n_{p-1} \quad ; \quad n_1 = \alpha_0 \quad ; \quad n_p = \alpha_0^p$$

il che implica che il *nucleo non ha altri autovalori* che $1 + \lambda\alpha_0 = 0$, ed altre autofunzioni che $\varphi = \text{cost}$.

Nel caso, infine, che fosse $a = \pm b$, la discussione procederebbe in modo del tutto analogo a quella del nucleo di classe $(1, \pm 1)$; basta considerare che il nucleo n_1 e la funzione φ avranno il periodo $\frac{1}{a}$, per ridursi, mediante la trasformazione $x' = ax$, $y' = ay$, $\lambda' = \frac{\lambda}{a}$, al nucleo di classe $(1, \pm 1)$.

6. Se si avessero invece delle equazioni di prima specie

$$\int_0^1 n(x\,,y)\;\varphi(y)\;dy = f(x)$$

si trova, come prima condizione necessaria per la risolubilità, che la $f(x)$ sia periodica, a periodo 1. Quindi, adottando il solito sviluppo in serie, ne segue che deve essere

$$\alpha_0\,\gamma_0 + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty (\alpha_r\,\gamma_s \mp \beta_r\,\delta_s)\cos 2\pi r a x +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty (\pm\,\alpha_r\,\delta_s + \beta_r\,\gamma_s)\,\text{sen}\,2\pi r a x = f(x) = \varepsilon_0 +$$

$$+ \sum_1^\infty \varepsilon_\varrho \cos 2\pi\varrho x + \sum_1^\infty \theta_\varrho\,\text{sen}\,2\pi\varrho x \qquad s = |rb|$$

Ciò obbliga $\varepsilon_\varrho\,,\theta_\varrho$ ad essere nulli se non è ϱ multiplo di a, mentre si ha

$$\begin{aligned} &\alpha_0\,\gamma_0 = \varepsilon_0 && r = 1\,,2\,,\ldots \\ &\tfrac{1}{2}\,(\alpha_r\,\gamma_s \mp \beta_r\,\delta_s) \quad = \varepsilon_\varrho && s = |rb| \\ &\tfrac{1}{2}\,(\pm\,\alpha_r\,\delta_s + \beta_r\,\gamma_s = \theta_\varrho && \varrho = ra \end{aligned}$$

ove per semplicità negli indici si è segnato s invece di $|rb|$, ϱ invece di ra.

Si vede che il determinante dei coefficienti di $\gamma_s\,,\delta_s$, coefficiente del Fourier della φ, cioè

$$\tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} \alpha_r & \mp\beta_r \\ \beta_r & \pm\alpha_r \end{vmatrix}$$

è sempre eguale a $\pm\frac{1}{4}\cdot(\alpha_r^2 + \beta_r^2)$; ed è quindi diverso da zero, a meno che non siano nulli α_r e β_r. Nel primo caso, dati ε_ϱ e θ_ϱ ; γ_s e δ_s restano fissati in modo unico; e se $\varepsilon_\varrho\,,\theta_\varrho$ sono nulli (il che avviene sempre che ϱ non sia multiplo di a), saranno nulli anche γ e δ.

Nel secondo, invece, ε_ϱ e θ_ϱ dovranno essere eguali a zero; e $\gamma_s\,,\delta_s$ potranno invece essere qualunque.

Quindi, *fra le* γ_s *e le* δ_s, *sono arbitrari*:
quelli aventi l'indice s *non multiplo di* b;
quelli aventi l'indice $s = |rb|$, *se si ha* $\alpha_r = \beta_r = 0$.
Sono fissati in modo unico:
quelli aventi l'indice $s = |rb|$, *se* $\alpha_r^2 + \beta_r^2 \neq 0$.

La funzione f, a sua volta, dovrà avere nulli tutti i coefficienti di Fourier il cui indice non è multiplo di a, e quelli per cui $\alpha_r = \beta_r = 0$.

Se, infine, chiamiamo nuclei generali di Evans gli aggregati (delle serie, purchè, ad esempio, uniformemente convergenti) di nuclei di Evans di classe diversa, si vede che i teoremi continuano a valere; così ad es. si ha:

Teorema VII. — *La composizione di due nuclei generali di Evans dà ancora un nucleo generale di Evans; essi quindi formano gruppo. Con procedimenti analoghi a quelli svolti finora, si potrebbero determinare le tracce, gli autovalori, e autofunzioni di tali nuclei.*

Meccanica celeste. — *Osservazioni sopra una recente teoria della luce zodiacale.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrispondente A. Di Legge [1].

1. Una spiegazione, certamente assai elegante, della luce zodiacale è stata data di recente dal sig. B. Fessenkoff in una Nota pubblicata nel vol. 198 delle Astronomische Nachrichten, e riprodotta quindi in altre riviste scientifiche; per es. C. R. 1914, pp. 541 e 1001 ecc.

Quest'astronomo suppone che tutte le comete entrino nella sfera d'attrazione del Sole con velocità tale che la loro orbita riesca esattamente parabolica: una gran parte di esse è quindi catturata da Giove e trasformata in comete ellittiche secondo le formole notissime del Tisserand.

Secondo il Fessenkoff, sono appunto i *resti di un gran numero di queste comete ellittiche* che, circolando intorno al Sole e riflettendone la luce, dànno origine a quella nube a forma di lente che si estende per parecchi gradi lungo l'eclittica, da una parte e dall'altra del Sole, e che viene conosciuta sotto il nome di luce zodiacale. Una teoria analoga era stata proposta dallo Charlier per spiegare il cosidetto « Gegenschein » (apparenza luminosa che si scorge nel cielo in direzione opposta al Sole) supponendo che un gruppo di aereoliti si mantenga nelle vicinanze del secondo centro di librazione lagrangiano, situato sulla retta Sole-Terra dalla parte opposta al Sole rispetto alla Terra.

L'ipotesi del Fessenkoff ha il vantaggio di spiegare facilmente perchè la luce zodiacale si trovi presso a poco nel piano dell'eclittica, giacchè egli dimostra che le comete la cui orbita si trova nel piano dell orbita di Giove, hanno la massima probabilità di essere catturate: ma superato questo punto sorgono gravi difficoltà.

Infatti, mentre nulla v'è da osservare nella teoria dello Charlier, è strano come non sia stato ancor rilevato che una formola fondamentale a cui giunge il Fessenkoff è in diretta opposizione con una formola analoga data dal

[1] Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1916.