ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

9. Precisando, a me sembra che la teoria del Fessenkoff potrebbe modificarsi nel modo seguente:

Poichè tra tutte le comete entranti nella sfera d'attrazione solare, solo quelle, le cui orbite sono situate presso a poco nel piano dell'orbita di Giove, hanno grande probabilità di essere catturate, è chiaro che i resti di queste comete dovranno alla lunga formare una nube giacente in questo piano. I numerosissimi meteoriti che la compongono si muoveranno in orbite quali più quali meno ellittiche, ruotando intorno al Sole alcuni in senso diretto, altri in senso retrogrado, secondo il moto della cometa primitiva. Avverranno quindi necessariamente urti numerosi, in seguito ai quali i meteoriti urtati tenderanno a cadere verso il Sole. Dopo un tempo lunghissimo la nube zodiacale avrà assunto perciò una grande densità nelle vicinanze del Sole e diverrà più rada man mano che ci allontaniamo da esso, il che è in buon accordo con l'osservazione.

Matematica. — *Sulle discontinuità delle funzioni scalari e vettoriali e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Lo studio delle discontinuità delle funzioni scalari, dei vettori e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie, si suol fare con mezzi speciali dipendenti dalla particolar forma delle funzioni che si sottopongono ad esame. Così, ad esempio, pei potenziali newtoniani. In tal modo sfuggono le proprietà di carattere generale, e si è costretti di rifarne interamente lo studio caso per caso. Per questo credo interessante la presente Nota, contenente una rigorosa e generale ricerca della natura, direi, geometrica delle discontinuità indipendentemente dalla special forma delle funzioni, fatta con mezzi rapidi e semplici. Dalle applicazioni, che ho brevemente accennate, risulterà chiaramente la sua utilità. Per l'analisi vettoriale ho seguìto l'opera di Burali-Forti e Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, Tome I.

1. — Preliminari.

La grandezza scalare φ e il vettore $\mathbf{u}$ son definiti in un campo S luogo dei punti M, nel quale s'immagina tracciata una superficie σ (aperta o chiusa) luogo dei punti P. Distinguendo le due facce σ_1 e σ_2 di σ, indicheremo con $\mathbf{n}$ il vettore unitario che definisce la normale in un punto generico P nel senso da σ_1 a σ_2; con φ_1, $\mathbf{u}_1$ e φ_2, $\mathbf{u}_2$ i valori di φ e $\mathbf{u}$ nelle

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1916.

regioni rispettivamente adiacenti alle facce σ_1 e σ_2. Circa il comportamento di queste grandezze attraverso σ, considereremo due casi: il caso della continuità, caratterizzato da

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0 \qquad \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = 0 \qquad (\text{su } \sigma);$$

e quello della discontinuità, caratterizzato da

$$\varphi_2 - \varphi_1 = [\varphi] \neq 0 \quad , \quad \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 = [\mathbf{u}] \neq 0 \qquad (\text{su } \sigma);$$

rappresentando in generale la discontinuità di una grandezza col simbolo relativo alla grandezza racchiuso in una parentesi quadra.

Chiameremo *gradiente superficiale di* φ, e lo indicheremo con $grad_\sigma$, il vettore definito nei punti P di σ da

$$\text{grad}_\sigma\, \varphi = \text{grad}\, \varphi - (\text{grad}\, \varphi \times \mathbf{n})\, \mathbf{n}\,,$$

dove il grad φ del secondo membro è l'ordinario gradiente di φ in P, quando φ è definita con continuità in tutto S; mentre rappresenta il limite dell'ordinario gradiente per M tendente a P, quando φ è definita con continuità da un sol lato di σ [1]. Per uno spostamento dP lungo σ risulta

$$\text{(1)} \qquad \text{grad}_\sigma\, \varphi \times d\mathrm{P} = \text{grad}\, \varphi \times d\mathrm{P} = d\varphi\,,$$

essendo $d\varphi$ l'incremento di φ corrispondente a dP. Di qui si vede che grad_σ è effettivamente un operatore sopra σ [2], che gode delle stesse proprietà dell'operatore spaziale grad; onde si ha

$$\text{grad}_\sigma(\varphi + \psi) = \text{grad}_\sigma\, \varphi + \text{grad}_\sigma\, \psi \;,\; \text{grad}_\sigma(\varphi\psi) = \varphi\, \text{grad}_\sigma\, \psi + \psi\, \text{grad}_\sigma\, \varphi.$$

Introdurremo inoltre *la derivata superficiale del vettore* $\mathbf{u}$, col simbolo $\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)_\sigma$, mediante la formula di definizione

$$\left(\frac{du}{d\mathrm{P}}\right)_\sigma = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} - \mathrm{H}\left(\mathbf{n}\,, \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{n}\right).$$

[1] Il gradiente superficiale fu già introdotto da Burali-Forti nella Memoria: *Fondamenti per la geometria differenziale* ... Rend. Circ. Mat. Palermo, 1912. Non è altro che la componente di grad φ sul piano tangente a σ in P.

[2] Questo operatore, insieme ad altri che ho avuto occasione di considerare per varie ricerche, ha grande importanza nella teoria delle superficie. Per esempio

$$(\text{grad}_\sigma\, \varphi)^2 \;,\; \text{grad}_\sigma\, \varphi \times \text{grad}_\sigma\, \psi$$

sono rispettivamente il parametro differenzial primo di φ, e il parametro differenzial misto di φ e ψ relativi a σ.

Veramente nel secondo membro bisognerebbe scrivere

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right)_{\text{per } M=P},$$

sia per chiarezza, sia per comprendere anche il caso in cui $\mathbf{u}$ sia definito con continuità da un sol lato di σ. Ma abbiamo scritto così per semplicità; ed il lettore, ora avvertito, non cadrà in equivoco. Ricordiamo che in generale $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ rappresenta una diade (omografia degenere), definita dall'operazione $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$; talchè si ha

$$H(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\,\mathbf{b}.$$

Risulta subito, per ogni spostamento dP sopra σ,

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma dP = \frac{d\mathbf{u}}{dP}\, dP = d\mathbf{u}, \tag{2}$$

essendo $d\mathbf{u}$ l'incremento di $\mathbf{u}$ corrispondente a dP. Di qui si vede che la derivata superficiale d'un vettore è effettivamente una omografia che gode delle stesse proprietà della derivata spaziale.

Si noti infine che, quando φ e $\mathbf{u}$ sono definiti nei soli punti P di σ, $\text{grad}_\sigma \varphi$ e $\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma$ sono equivalenti a $\text{grad}\,\varphi$ e $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$; o meglio, questi ultimi enti non si possono concepire che nel senso dei primi. Si ha in tal caso

$$\text{grad}_\sigma \varphi \times \mathbf{n} = \text{grad}\,\varphi \times \mathbf{n} = 0 \quad , \quad \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{u}}{dP}\,\mathbf{n} = 0.$$

2. — Comportamento di $\text{grad}\,\varphi$ attraverso σ.

Essendo φ definita in tutto S, partiamo dal punto P di σ e passiamo al punto vicinissimo $P + dP$ pure di σ; ma restando, una volta sulla faccia σ_1, una seconda volta sulla σ_2. Si ottiene manifestamente, per quanto si è detto,

$$d\varphi_1 = \text{grad}_\sigma \varphi_1 \times dP \quad , \quad d\varphi_2 = \text{grad}_\sigma \varphi_2 \times dP;$$

da cui

$$d\varphi_2 - d\varphi_1 = (\text{grad}_\sigma \varphi_2 - \text{grad}\,\varphi_1) \times dP. \tag{4}$$

Distinguiamo per chiarezza i due casi sopra distinti.

1° caso. La φ è continua anche attraverso σ. Allora la (4) dà

$$(\text{grad}_\sigma \varphi_2 - \text{grad}_\sigma \varphi_1) \times dP = 0;$$

od anche, per la (1),

$$(\text{grad}\,\varphi_2 - \text{grad}\,\varphi_1) \times dP = 0.$$

Ma la differenza tra parentesi non è altro che la discontinuità che prova grad φ attraverso σ; dunque

$$[\text{grad}\,\varphi] \times dP = 0\,.$$

Poichè ogni dP è normale a $\mathbf{n}$, ne consegue

$$(5) \qquad [\text{grad}\,\varphi] = m\,\mathbf{n}\,,$$

essendo m un numero funzione di P. Questo m rappresenta manifestamente la discontinuità della derivata normale di φ (cioè di grad $\varphi \times \mathbf{n}$). Si conclude: *se attraverso σ il gradiente d'una funzione continua è discontinuo, la discontinuità in ogni punto* P *è rappresentata da un vettore parallelo alla normale in* P *e di grandezza e segno uguale alla discontinuità della derivata normale.* Perciò la discontinuità di questa derivata definisce la discontinuità di ogni altra derivata prima in qualsiasi direzione.

2° caso. La φ è discontinua attraverso σ. Allora la (4) dà

$$\begin{aligned} d[\varphi] &= (\text{grad}_\sigma\,\varphi_2 - \text{grad}_\sigma\,\varphi_1) \times dP \\ &= (\text{grad}\;\varphi_2 - \text{grad}\;\varphi_1) \times dP\,. \end{aligned}$$

Ma ricordando che in questo caso si ha (con manifesto significato dei simboli)

$$\text{grad}\,\varphi_2 = \lim_{M_2=P} \text{grad}_{M_2}\,\varphi \quad , \quad \text{grad}\,\varphi_1 = \lim_{M_1=P} \text{grad}_{M_1}\,\varphi\,,$$

si deduce che la differenza tra parentesi rappresenta la discontinuità di grad φ attraverso σ. Dunque

$$d[\varphi] = [\text{grad}\,\varphi] \times dP\,.$$

D'altra parte

$$d[\varphi] = \text{grad}_\sigma[\varphi] \times dP\,;$$

per conseguenza

$$\{[\text{grad}\,\varphi] - \text{grad}_\sigma[\varphi]\} \times dP = 0\,.$$

Poichè ogni dP è normale a $\mathbf{n}$, si trae

$$(6) \qquad [\text{grad}\,\varphi] = \text{grad}_\sigma[\varphi] + m\,\mathbf{n}\,,$$

ove m ha il significato precedente. Si conclude: *Se una funzione è discontinua attraverso σ* (discontinuità variabile con P), *anche il suo gradiente è discontinuo; e la discontinuità è uguale al gradiente superficiale della discontinuità della funzione* (*vettore tangenziale*) *più un vettore normale a σ di grandezza e segno uguale alla discontinuità della derivata normale.* Perciò la discontinuità della funzione e di questa derivata definiscono la discontinuità d'ogni altra prima derivata in qualsiasi direzione.

Inversamente: se la discontinuità del gradiente è del tipo (5); ossia è rappresentata da un vettore parallelo in ogni punto di σ alla normale; la funzione o è continua attraverso σ, o ha una discontinuità costante; se invece è rappresentata da un vettore non parallelo alla normale, la funzione è discontinua attraverso σ, con discontinuità variabile.

3. — Comportamento di $\frac{d\mathbf{u}}{dM}$ attraverso σ.

Ragionando sopra $\mathbf{u}$ come già si è fatto con φ, si trova

$$d\mathbf{u}_1 = \left(\frac{d\mathbf{u}_1}{dP}\right)_\sigma dP \quad , \quad d\mathbf{u}_2 = \left(\frac{d\mathbf{u}_2}{dP}\right)_\sigma dP \, ;$$

da cui

$$(7) \qquad d\mathbf{u}_2 - d\mathbf{u}_1 = \left\{\left(\frac{d\mathbf{u}_2}{dP}\right)_\sigma - \left(\frac{d\mathbf{u}_1}{dP}\right)_\sigma\right\} dP \, .$$

Se $\mathbf{u}$ è continuo, si vede ora subito che risulta, usando la (2),

$$\left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] dP = 0 \ (^1).$$

Poichè $\mathbf{n} \times dP = 0$; indicando con $\mathbf{v}$ un vettore, si ha

$$(7') \qquad (\mathbf{n} \times dP)\, \mathbf{v} = H(\mathbf{n}, \mathbf{v})\, dP = 0 \, ,$$

per conseguenza dovrà essere

$$(8) \qquad \left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] = H(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \, ,$$

dove $\mathbf{v}$ è funzione di P (²). Questo $\mathbf{v}$ rappresenta la discontinuità della derivata normale di $\mathbf{u}$, cioè di $\frac{d\mathbf{u}}{dM}\mathbf{n}$. *Se dunque attraverso σ la derivata d'un vettore continuo* (s'intende rispetto al punto di cui è funzione) *è discontinua, la discontinuità è rappresentata da una diade, i cui due vettori sono, uno quello che definisce la normale, l'altro quello che definisce la discontinuità della derivata normale del vettore.*

Quando $\mathbf{u}$ è discontinuo, la (7) dà, con ragionamenti analoghi a quelli già fatti,

$$d[\mathbf{u}] = \left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] dP \, .$$

(¹) Si dovrebbe scrivere $\left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right]_{M=P}$; ma la parentesi quadra avverte essa stessa che si è passati a un punto della superficie.

(²) Un fattore sarebbe inutile, perchè s'unirebbe a $\mathbf{v}$.

Tenendo conto della (7′) e della relazione

$$d[\mathbf{u}] = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}}\, d\mathrm{P} \quad \text{(l'indice } \sigma \text{ qui è inutile)}$$

si deduce

$$\left[\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}\right] = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{v})\,. \tag{9}$$

Se dunque attraverso σ un vettore è discontinuo (con discontinuità variabile), *pure discontinua sarà la sua derivata rispetto al punto di cui è funzione; la discontinuità essendo definita dalla derivata della discontinuità del vettore* (che è pure un vettore) *rispetto ai punti della superficie, più la diade accennata nel teorema precedente*; il quale teorema del resto è corollario di questo.

Ne consegue che la discontinuità del vettore nel caso che sia discontinuo e quella della sua derivata normale in ogni caso definiscono le discontinuità delle derivate in qualsiasi direzione di qualunque componente del vettore.

Le proposizioni inverse sono evidenti.

Matematica. — *Gli hamiltoniani ed i gradienti del prodotto di due funzioni estensive.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Nelle mie Note dal titolo: *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti* ecc. [pubblicate in questi medesimi Rendiconti [2]] che, nel seguito, indicherò complessivamente con *Npg*, conservando poi tutte le notazioni e definizioni in esse adoperate [epperò anche quelle delle Note [3] indicatevi coi simboli N I, N II, *Npr*], occupandomi della forma presa dall'hamiltoniano, e dal gradiente, rispetto ad una medesima formazione Ω, del prodotto di due funzioni estensive U, V, lasciai da parte, per le considerazioni speciali che, a differenza degli altri casi, esso merita, il sotto-caso β) del 3° caso. Ora, è scopo della presente Nota di colmare appunto una tale lacuna.

1. **a)** Il caso di cui si parla è quello nel quale i prodotti

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\,\mathrm{V}\,|\,\mathrm{E}_i \quad , \quad \mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i \tag{1}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] Cfr. fascicoli 7° e 8° precedenti.

[3] NI, NII nei Rend. di Napoli, fasc. luglio-agosto 1916; *Npr* in questi Rendic.