ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Tenendo conto della (7') e della relazione

$$d[\mathbf{u}] = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}}\, d\mathrm{P} \quad \text{(l'indice } \sigma \text{ qui è inutile)}$$

si deduce

$$\left[\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}\right] = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{v})\,. \tag{9}$$

Se dunque attraverso σ *un vettore è discontinuo* (con discontinuità variabile), *pure discontinua sarà la sua derivata rispetto al punto di cui è funzione; la discontinuità essendo definita dalla derivata della discontinuità del vettore* (che è pure un vettore) *rispetto ai punti della superficie, più la diade accennata nel teorema precedente*; il quale teorema del resto è corollario di questo.

Ne consegue che la discontinuità del vettore nel caso che sia discontinuo e quella della sua derivata normale in ogni caso definiscono le discontinuità delle derivate in qualsiasi direzione di qualunque componente del vettore.

Le proposizioni inverse sono evidenti.

Matematica. — *Gli hamiltoniani ed i gradienti del prodotto di due funzioni estensive.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra [1].

Nelle mie Note dal titolo: *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti* ecc. [pubblicate in questi medesimi Rendiconti [2]] che, nel seguito, indicherò complessivamente con *Npg*, conservando poi tutte le notazioni e definizioni in esse adoperate [epperò anche quelle delle Note [3] indicatevi coi simboli N I, N II, *Npr*], occupandomi della forma presa dall'hamiltoniano, e dal gradiente, rispetto ad una medesima formazione Ω, del prodotto di due funzioni estensive U, V, lasciai da parte, per le considerazioni speciali che, a differenza degli altri casi, esso merita, il sotto-caso β) del 3° caso. Ora, è scopo della presente Nota di colmare appunto una tale lacuna.

1. **a**) Il caso di cui si parla è quello nel quale i prodotti

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i}\,\mathrm{V}\,|\,\mathrm{E}_i \quad , \quad \mathrm{U}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i}\,|\,\mathrm{E}_i \tag{1}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] Cfr. fascicoli 7° e 8° precedenti.

[3] NI, NII nei Rend. di Napoli, fasc. luglio-agosto 1916; *Npr* in questi Rendic.

sono *misti*, ed allora può avvenire che sia applicabile a ciascuno di essi un teorema dato da E. Müller nel vol. 48, an. 1897, dei Matematische Annalen [1] sullo spezzamento di un prodotto misto in una certa somma di due altri prodotti analoghi. In tale ipotesi, con adattamento al caso nostro, ai suddetti prodotti è possibile dare la forma [2]

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} V \mid E_i &= \lambda \frac{\partial U}{\partial \omega_i} V \mid E_i + \lambda \mu U \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \mid E_i \,.\, V \\ U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \mid E_i &= \lambda' U \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \mid E_i + \lambda' \mu' U \mid E_i \,.\, \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \end{aligned}$$

ove $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sono delle potenze di (-1); e con una somma da $i=1$ ad $i=m$, per l'hamiltoniano, si avrà:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \nabla_\Omega (UV) = \lambda \Sigma \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \cdot V \mid E_i + \lambda' \mu' \Sigma U \mid E_i \frac{\partial V}{\partial \omega_i} + \\ + \lambda\mu \nabla_\Omega U \,.\, V + \lambda' U \,.\, \nabla_\Omega V \,. \end{aligned}$$

Ora, circa i prodotti (1), il suddetto teorema è applicabile quando sia:

1°. α) $\tau + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \tau < n+1 \,,$
nel qual caso si ha come condizione $\sigma + \tau + \varrho' = n+2$; o

β) $\tau + \varrho' > n+1 \;,\; \sigma + \varrho' > n+1 \;,\; \sigma + \tau > n+1 \,.$
nel qual caso la condizione è $\sigma + \tau + \varrho' = 2n+1$.

2°. α) $\tau + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \varrho' > n+1 \;,\; \sigma + \tau < n+1 \,,$
nel qual caso si trova, come condizione, $\tau = 1$; o

β) $\tau + \varrho' > n+1 \;,\; \sigma + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \tau > n+1 \,,$
nel qual caso la condizione è $\tau = n$.

3°. α) $\tau + \sigma' > n+1 \;,\; \sigma + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \tau < n+1 \,,$
nel qual caso la condizione è $\sigma = 1$; o

β) $\tau + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \varrho' > n+1 \;,\; \sigma + \tau > n+1 \,,$
nel qual caso la condizione è $\sigma = n$.

4°. α) $\tau + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \varrho' < n+1 \;,\; \sigma + \tau > n+1 \,,$
nel qual caso la condizione è $\varrho' = 1$; o

[1] *Ueber das gemischte Product*, pag. 589 (cfr. spec. formule riassuntive, pp. 593, 594).

[2] Questa forma è diversa da quella che risulterebbe dall'applicazione pura e semplice del teorema del Müller, la quale richiederebbe che ai prlmi membri delle (2) figurassero i primi termini dei secondi membri sprovvisti dei coefficienti λ, λ'; ma con una moltiplicazione per λ, λ' delle due relazioni vien facile vedere come si può ridurre alle (21).

β) $\tau + \varrho' > n + 1$, $\sigma + \varrho' > n + 1$. $\sigma + \tau < n + 1$

nel qual caso è $\varrho' = n$ la condizione da verificarsi.

b) Circa i valori delle $\lambda , \mu , \lambda' , \mu'$ che corrispondono ai varî casi messi in rilievo, si ha:

per 1°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\tau}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\rho(\tau+1)}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\tau'}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\rho(\tau'+1)}$

per 2°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\tau+\rho'-n=\tau-\rho+1}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\sigma+\rho'-n-1=\sigma-\rho}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\rho-\sigma+1}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\rho'-\sigma}$

per 3°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\rho}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\tau'(\rho+1)}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\rho'}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\tau(\rho'+1)}$

per 4°, α): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\tau'}$, $\mu = \mu' = (-1)^{\sigma'-1}$

" β): $\lambda = \lambda' = (-1)^{\sigma'}$. $\mu = \mu' = (-1)^{\tau'-1}$ (1):

dove si rammenta che $\sigma + \sigma' = \tau + \tau' = \varrho + \varrho' = n + 1$.

c) Analogamente, verificandosi le condizioni a cui si riducono le precedenti quando al posto di ϱ' si ponga ϱ, si potrà scrivere:

$$(4) \qquad \mathrm{G}_\Omega(\mathrm{UV}) = \lambda \left(\mathrm{U} \, . \, \mathrm{G}_\Omega \mathrm{V} + \sum \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i} \cdot \mathrm{V} \,|\, \mathrm{E}_i \right) + \\ + \lambda\mu \left(\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U} \, . \, \mathrm{V} + \sum \mathrm{U} \, \mathrm{E}_i \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i} \right),$$

con i valori per λ , μ che si deducono nei varî casi, da quelli testè dati, quando al posto di ϱ' si ponga ϱ.

2. **a**) Quando nessuno dei casi considerati in **a**) ha luogo, converrà, per formare il ∇_Ω ed il G_Ω del prodotto UV, o contentarsi di scrivere d'una maniera generica:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \nabla_\Omega(\mathrm{UV}) &= (-1)^{\rho\rho'} \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i} \mathrm{V} + \mathrm{U} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i} \right) | \, \mathrm{E}_i \\ \mathrm{G}_\Omega(\mathrm{UV}) &= \sum \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_i} \mathrm{V} + \mathrm{U} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \omega_i} \right) \mathrm{E}_i , \end{aligned}$$

o formarsi dapprima la espressione ridotta del prodotto UV, e poi, a seconda del caso, applicare le (22), (22') date nella *Npg*, con quelle che ne sono immediata conseguenza, date nella medesima Nota.

(1) Questa tabella di valori, apparentemente disimmetrica, è stata confrontata con quella che dà il Müller a pp. 593 e 594 della Nota citata.

Seguiamo questa via che, del resto, ci procura altre informazioni, e ci mette in evidenza la portata dei termini additivi che si presentano nelle formule (3) e (4) precedenti quando è applicabile il teorema di E. Müller. Supponiamo che si abbia

$$(6)\qquad \begin{aligned} U &= U_1 . F_1 + U_2 . F_2 + \cdots + U_q . F_q \\ V &= V_1 . G_1 + V_2 . G_2 + \cdots + V_r . G_r , \end{aligned}$$

ove le F_h, $U_h (h = 1, 2, \dots, q)$ hanno il significato dato innanzi, e G_h, V_h per $h = 1, 2, \dots, r$ significato analogo; vale a dire siano $G_1, G_2, \dots, G_r$ le formazioni $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_r} \left[i = 1, 2, \dots, r = \binom{n+1}{\tau} \right]$ ordinate come le E_h, F_h, e siano $V_1, V_2, \dots V_r$ funzioni scalari delle $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$.

b) Indicando con W il prodotto UV, cioè ponendo

$$(7)\qquad \begin{aligned} W = UV &= (U_1 . F_1 + U_2 . F_2 + \cdots + U_h . F_h)(V_1 . G_1 + V_2 . G_2 + \cdots + V_r . G_r) \\ &= U_1 V_1 . F_1 G_1 + \cdots + U_h V_k . F_h G_k + \cdots + U_q V_r . F_q G_r , \end{aligned}$$

si vede che sono a distinguersi, relativamente ad esso, i casi seguenti:

1° caso: $\sigma + \tau < n + 1$. In tal caso il prodotto generico $F_h G_k$ è nullo se le due permutazioni $h_1 h_2 \dots h_\sigma$, $k_1 k_2 \dots k_\tau$ hanno dei termini comuni; non lo è, e rappresenta una formazione semplice d'ordine $\sigma + \tau$, se sono formate di numeri tutti distinti. Per esaminare quanti prodotti $F_h G_k$ non sono nulli, basterà esaminare in quanti modi si può associare un gruppo σ dei numeri $1, 2, \dots, n+1$ con un gruppo τ dei rimanenti, e ciò dà luogo ad

$$(8)\qquad \binom{n+1}{\sigma}\binom{n+1-\sigma}{\tau} = \binom{n+1}{\tau}\binom{n+1-\tau}{\sigma}$$

modi; ovvero ad esaminare in quanti modi è possibile togliere dal gruppo dei numeri $1, 2, \dots, n+1$, un gruppo di $n + 1 - \sigma - \tau$, ed associarlo con un gruppo dei rimanenti presi τ a τ; e ciò dà luogo ad

$$(9)\qquad \binom{n+1}{\sigma+\tau}\binom{\sigma+\tau}{\tau} = \binom{n+1}{\sigma+\tau}\binom{\sigma+\tau}{\sigma}$$

modi. [Si noti, frattanto, la identità delle espressioni che figurano nelle (8), (9)]. Se osserviamo che vi sono $\binom{\sigma+\tau}{\sigma}$ prodotti del tipo $F_h G_k$ che contengono le medesime unità fondamentali, distribuite nell'ordine medesimo nel quale si trovano in F_h e G_k, ne concludiamo che *il prodotto* UV *contiene*

$$\binom{n+1}{\sigma+\tau}\binom{\sigma+\tau}{\sigma}$$

prodotti parziali non nulli del tipo $U_h V_k . F_h G_k$, *e semplicemente* $\binom{n+1}{\sigma+\tau}$ *prodotti analoghi non nulli, nei quali figurano gruppi di unità diverse.* Adoperando linguaggio geometrico, quest' ultima circostanza era a prevedersi, poichè $\binom{n+1}{\sigma+\tau}$ rappresenta il numero dei $(\sigma+\tau)$*-spigoli della piramide di riferimento.*

Se conveniamo di indicare con $h^{(1)}, h^{(2)}, \ldots, h^{(\mu)}$, $\mu = \binom{\sigma+\tau}{\sigma}$ tutte le permutazioni principali di classe σ che è possibile fare coi numeri $h_1 h_2 \ldots h_\sigma\ k_1 k_2 \ldots k_\tau$, disposti nell'ordine stesso nel quale questi si seguono, e con $k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(\mu)}$ le permutazioni ordinatamente complementari di quelle fra tali $\sigma+\tau$ numeri, e conveniamo altresì che, corrispondentemente agli indici superiori pari, o dispari, stiano le permutazioni con numeri pari, o dispari, di inversioni, noi potremo scrivere il prodotto W nella maniera seguente:

$$W = \sum_{hk} [-U_{k^{(1)}} V_{k^{(1)}} + \cdots + (-1)^{\mu} U_{h^{(\mu)}} V_{k^{(\mu)}}] L_{hk},$$

ove intendiamo che L_{hk} sia il prodotto delle $\sigma+\tau$ unità fondamentali $e_{h_1} e_{h_2} \ldots e_{h_\sigma} e_{k_1} e_{k_2} \ldots e_{k_\tau}$ seguentisi in modo da formare una permutazione principale di classe $\sigma+\tau$ fra le $e_1 e_2 \ldots e_{n+1}$, ed il $\sum_{hk}$ sia esteso a tutti gli $\binom{n+1}{\sigma+\tau}$ prodotti di tipo siffatto.

Nel caso in esame, abbiamo, per $\nabla_\Omega W$ e $G_\Omega W$, rispettivamente

$$(10)\quad \nabla_\Omega(UV) = \sum_{hk} \sum_{r=1}^{r=\mu} (-1)^r . (-1)^{\varrho'\theta} (\nabla_\Omega U_{h^{(r)}} . V_{k^{(r)}} + U_{h^{(r)}} . \nabla_\Omega V_{k^{(r)}}) L_{hk}$$

con $\theta = \sigma+\tau$, $\theta = \varrho'$, $\theta = n+1-\sigma-\tau$, secondochè $\varrho > \sigma+\tau$, $\varrho = \sigma+\tau$, $\varrho < \sigma+\tau$ [cfr. formule (17), (18), (19) della *Npr*], e

$$(11)\quad G_\Omega(UV) = \sum_{hk} \sum_{r=1}^{r=\mu} (-1)^r . (-1)^{\gamma\theta} [G_\Omega U_{h^{(r)}} . V_{k^{(r)}} + U_{h^{(r)}} . \nabla_\Omega V_{k^{(r)}}] L_{hk}$$

con $\gamma\theta = \varrho(\sigma+\tau)$, $\gamma\theta = \varrho\varrho'$, $\gamma\theta = \varrho'(n+1-\sigma-\tau)$ secondochè $\varrho' < \sigma+\tau$, $\varrho' = \sigma+\tau$, $\varrho' > \sigma+\tau$ [cfr. formule (20), (21), (22) della *Npr*].

2° caso: $\sigma+\tau = n+1$. In questo caso non sono nulli, e sono scalari, quei prodotti del tipo $F_h . G_k$ pei quali le due permutazioni $h_1 h_2 \ldots h_\sigma$, $k_1 k_2 \ldots k_\tau$ sono complementari. Tali prodotti sono in numero di

$$\binom{n+1}{\sigma} = \binom{n+1}{\tau};$$

ed allora, indicando con V_{m-h} la V_k che moltiplica la G_k corrispondente alla $k_1 k_2 \dots k_\tau$ complementare della $h_1 h_2 \dots h_\sigma$, possiamo scrivere la W nella forma

$$W = U_1 V_{m-1} + U_2 V_{m-2} + \cdots + U_m V_\sigma ;$$

e quindi:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \nabla_\Omega(UV) &= \sum_{h=1}^{h=m} (\nabla_\Omega U_h . V_{m-h} + U_h . \nabla_\Omega U_{m-h}) \\ G_\Omega(UV) &= \sum_{h=1}^{h=m} (G_\Omega U_h . V_{m-h} + U_h . G_\Omega V_{m-h}) . \end{aligned}$$

3° caso: $\sigma + \tau > n + 1$. In questo caso i prodotti del tipo $F_h . G_k$ nei quali il numero delle unità fondamentali comuni ad F_h e G_k supera la differenza χ fra $\sigma + \tau$ ed $n + 1$ (poniamo $\chi = \sigma + \tau - n - 1$), sono nulli perchè allora le formazioni semplici F_h e G_k appartengono ad una medesima altra formazione semplice di ordine almeno n (sono spazî a $\sigma - 1$ ed a $\tau - 1$ dimensioni contenuti entrambi in uno stesso spazio ad $n - 1$ dimensioni); e sono, invece, prodotti regressivi, non nulli, tutti quelli pei quali le unità comuni ad F_h ed a G_k sono soltanto χ; siffatti prodotti non nulli sono quindi in numero di $\binom{\sigma + \tau}{\chi} = \binom{n + 1 + \chi}{\chi} = \binom{n + 1 + \chi}{n + 1}$, e per formarne uno (ci riferiamo ai soli indici h, k) basta prendere, tra i numeri $1, 2, \dots, n + 1$, un gruppo di χ, associarlo ad un gruppo di $\sigma - \chi$ preso fra i rimanenti, in guisa che il prodotto totale costituisca una permutazione principale di classe σ, e poi associarlo di nuovo al gruppo dei $\tau - \chi$ numeri residuali, pure in guisa che questo secondo gruppo costituisca una permutazione principale di classe τ dei numeri $1, 2, \dots, n + 1$.

Questo procedimento mette subito in rilievo che di prodotti $F_h . G_k$ aventi uno stesso gruppo χ di unità fondamentali comuni ve ne sono

$$\mu = \binom{n + 1 - \chi}{\sigma - \chi} = \binom{n + 1 - \chi}{n + 1 - \sigma} = \binom{n + 1 - \chi}{\tau - \chi} ;$$

epperò, se si indicano con $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(\mu)}$ e con $k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(\mu)}$ rispettivamente tutte le h e tutte le k corrispondenti a tali gruppi, e semplicemente con hk il gruppo comune, potremo scrivere la W nella forma

$$(13) \qquad W = \sum_{hk} [(-1)^{\eta_1 + \zeta_1} U_{h^{(1)}} V_{k^{(1)}} + \cdots + (-1)^{\eta_\mu + \zeta_\mu} U_{h^{(\mu)}} V_{k^{(\mu)}}] M_{hk}$$

quando con η_s $(s = 1, 2, \dots, \mu)$ si indica il numero delle inversioni che vengono a generarsi in $h^{(s)}$ col portare in ultimo posto i numeri del gruppo hk, e con ζ_s $(s = 1, 2, \dots, \mu)$ si indichi l'analogo numero generato in $k^{(s)}$ col portare il gruppo hk in primo posto; e quando con M_{ik} si indichi lo χ-spigolo $e_{(hk)_1}, e_{(hk)_2}, \ldots, e_{(hk)_\chi}$ della piramide di riferimento formato dalle unità (vertici) corrispondenti al gruppo hk, ed il Σ sia esteso a tutti tali χ-spigoli.

Segue che, nel caso in esame,

$$(14)\quad \nabla_\Omega(\mathrm{UV}) = \sum_{hk} (-1)^\theta \sum_{s=1}^{s=\mu} (-1)^{\eta_s+\zeta_s} [\nabla_\Omega \mathrm{U}_{h^{(s)}} \mathrm{V}_{k^{(s)}} + \mathrm{U}_{h^{(s)}} \nabla_\Omega \mathrm{V}_{k^{(s)}}] \mathrm{M}_{ik}$$

con $\theta = \varrho\chi', \varrho\varrho', \varrho'\chi$ secondochè $\varrho' + \chi >, =, < n+1$, e

$$(14)\quad \mathrm{G}_\Omega(\mathrm{UV}) = \sum_{hk} (-1)^\theta \sum_{s=1}^{s=\mu} (-1)^{\eta_s+\zeta_s} [\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U}_{k^{(s)}} \mathrm{V}_k + \mathrm{U}_{h^{(s)}} \mathrm{G}_\Omega \mathrm{V}_{k^{(s)}}] \mathrm{M}_{ik},$$

con $\theta = \varrho'\chi', \varrho\varrho', \varrho\chi$ secondochè $\varrho + \chi >, =, < n+1$, per χ' intendendo che sia, come per $\varrho', \sigma', \ldots,$ $\chi' = n + 1 - \chi$.

Le formule (10), (11), (12), (14), (15) per $\nabla_\Omega(\mathrm{UV})$, $\mathrm{G}_\Omega(\mathrm{UV})$ convengono, evidentemente, per tutti i casi; cioè anche per quelli esaminati in antecedenza, e possono essere applicate quando, avendosi forme particolari di funzioni U, V, si viene a scorgere in anticipazione una semplicità nei calcoli.

3. Circa il ∇_Ω ed il G_Ω del prodotto *interno* U|V di due funzioni U, V, a cui ho accennato in fine della *Npg*, le considerazioni relative si riducono a quelle fatte pel caso dei prodotti progressivi e regressivi, poichè U|V significa appunto U.|V con diversa interpretazione del simbolo |. Tuttavia, conveniente sarebbe tenere presente la forma esplicita che prenderebbero le formule date finora, pel caso messo in rilievo.

Meccanica. — *Dimostrazione termodinamica della legge di Avogadro.* Nota di C. Del Lungo, presentata dal Socio A. Ròiti.

La sola dimostrazione diretta e rigorosa che finora si è data della legge di Avogadro, è quella che deriva dall'equipartizione dell'energia, secondo la legge di Maxwell della teoria cinetica dei gas. La via è dunque piuttosto lunga e non facile; e la legge di Maxwell già tanto discussa ha carattere piuttosto matematico che fisico, ed appartiene alla cosiddetta meccanica statistica.

Rimanendo nel campo fisico, della legge di Avogadro, così semplice e di fondamentale importanza, non si possono dare che dimostrazioni indirette e non completamente soddisfacenti. Essa in sostanza resta un'ipotesi, confermata nelle sue deduzioni dalle leggi fisiche sperimentali.