ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

scolari lisci, che il sangue eserciterebbe principalmente quando è ossigenato, a qualunque dei suoi componenti essa sia dovuta, costituisce un fatto di grandissima importanza, che merita di essere sperimentalmente analizzato. Essa sembra appartenere alla categoria delle azioni stimolanti di natura chimica (umorale), e quindi differisce dall'influenza tonica che la presenza dell'ossigeno esercita in generale, verosimilmente, almeno in parte, in quanto accelera negli organi il loro metabolismo, e particolarmente i processi di ossidazione, influenza tonica che, in accordo con questa interpretazione, si manifesta assai più lentamente, come gli esperimenti hanno dimostrato.

Matematica — *Sulla risoluzione di certe equazioni di composizione di seconda specie.* Nota I di Giulio Andreoli, presentata dal Socio V. Volterra [1].

1. Il problema che tratteremo in questa Nota, è una generalizzazione d'un problema già trattato dal Lalesco [2] e dal Daniele [3]: esso consiste nel determinare la soluzione generale dell'equazione di composizione [4] seguente:

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = a_1 n + a_2 \overset{\times\times}{n_2} + \cdots + a_m \overset{\times\times}{n^m} = 0\,, \tag{1}$$

ove le a sono delle costanti.

Si ponga intanto:

$$n(x\,y) = \sum_i \alpha_i \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y) \right), \tag{2}$$

ove le α sono radici dell'equazione:

$$f(\xi) = a_1\,\xi + a_2\,\xi^2 + \cdots a_m\,\xi^m = 0 \tag{3}$$

e le φ, ψ formano un sistema di funzioni biortogonali. Si vede che tale funzione soddisfa effettivamente la (1).

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1916.

[2] T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, pag. 38.

[3] E. Daniele, *Sui nuclei che si riproducono per iterazione*, Rend. Circ. matem. di Palermo, 1914 (2° sem., vol. XXXVIII).

[4] La chiameremo equazione di composizione di seconda specie seguendo la terminologia del Volterra: cfr. *Leçons sur les fonctions de Ligne*, Cap. XII, e *Leçons sur les équations intégrales*; Cfr. anche, per un problema analogo di cui si assegnano delle soluzioni, V. Volterra, *Sopra le funzioni permutabili di seconda specie e le equazioni integrali*, Rend. Accad. Lincei, ser. 3ª, vol. XX, 1° sem. 1911.

Infatti, per le condizioni di biortogonalità

$$\int_0^1 \varphi_r(t)\,\psi_s(t) = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

si trae

$$n(xy) = \sum_i \alpha_i \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y) \right)$$

$$\overset{\times\times}{n}{}^2(xy) = \sum_i \alpha_i^2 \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y) \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{\times\times}{n}{}^m(xy) = \sum_i \alpha_i^m \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y) \right);$$

e moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $a_1, a_2, \ldots a_m$, e sommando, si ha

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = \sum_i f(\alpha_i) \cdot \left(\sum_h \varphi_h(x)\,\psi_h(y) \right) = 0,$$

poichè $f(\alpha_i) = 0$.

Noi, in questa Nota, dimostreremo che solamente le funzioni della forma (2) soddisfano all'equazione scritta, nel caso che l'equazione algebrica (3) sia a radici distinte (e che quindi $a_1 \neq 0$).

Nel caso che la (3) abbia radici coincidenti, la (2) non è più la forma generale della soluzione.

Incidentalmente avremo un teorema sui determinanti.

Per $a_1 = -1$, $a_m = 1$, $a_2 \cdots = a_{m-1} = 0$ si ritrova l'equazione del Daniele, che a sua volta, per $m = 2$ diventa quella trattata da Lalesco.

La (1) rientra come caso particolare della

$$b_0(\overset{\times\times}{b}_1 + a_1)\overset{\times\times}{n} + (\overset{\times\times}{b}_2 + a_2)\overset{\times\times}{n}{}^2 + \cdots + (\overset{\times\times}{b}_m + a_m)\overset{\times\times}{n}{}^m = 0,$$

in cui le b sieno permutabili fra loro. In altre Note ci occuperemo dapprima del caso che le radici della (3) non sieno tutte distinte, e poi del caso più generale. Il metodo che seguiremo mi sembra completamente nuovo.

2. Notiamo che la (1) si può scrivere anche, nell'ipotesi che $a_m = 1$,

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = \overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n} - \alpha)(\overset{\times\times}{n} - \beta)\ldots(\overset{\times\times}{n} - \mu), \tag{4}$$

ove le $\alpha, \beta, \ldots \mu$ sono le radici dell'equazione algebrica (3).

Ora, poi che possiamo porre:

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = 0 = (\overset{\times\times}{n} - \alpha)\left\{ \overset{\times\times}{n}\left[(\overset{\times\times}{n} - \beta)(\overset{\times\times}{n} - \gamma)\ldots \right] \right\}$$

risulta subito che possiamo scrivere:

$$\overset{\times\times}{n}[\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n}-\beta)(\overset{\times\times}{n}-\gamma)\dots]=\alpha[\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n}-\beta)(\overset{\times\times}{n}-\gamma)\dots];$$

e ponendo:

$$\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n}-\beta)(\overset{\times\times}{n}-\gamma)\cdots=\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}),$$

avremo:

$$\overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=\alpha\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}), \tag{5}$$

da cui risulta:

$$(5^{bis})\quad \left\{\begin{array}{lll} \overset{\times\times}{n^2}\,\overset{\times\times}{f_1(n)} & =\alpha\,\overset{\times\times}{n}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) & =\alpha^2\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \\ \overset{\times\times}{n^3}\,\overset{\times\times}{f_1(n)} & =\alpha\,\overset{\times\times}{n^2}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) & =\alpha^3\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \overset{\times\times}{n^{m-1}}\,\overset{\times\times}{f_1(n)} & =\alpha\,\overset{\times\times}{n^{m-2}}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) & =\alpha^{m-1}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}). \end{array}\right.$$

Se noi ora scriviamo $\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})$ sotto forma di polinomio:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=a'_1\overset{\times\times}{n}+a'_2\overset{\times\times}{n^2}+\cdots a'_{m-1}\overset{\times\times}{n^{m-1}}\qquad (a'_{m-1}=1) \tag{6}$$

possiamo osservare facilmente, che da

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n})=(\overset{\times\times}{n}-\alpha)\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})$$

si trae essere le a' i coefficienti di $f_1(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-\alpha}$.

Se poi moltiplichiamo la (5) per a'_1, e tutte le equazioni (5^{bis}) rispettivamente per $a'_2, a'_3, \dots a'_{m-1}=1$, e sommiamo, otterremo precisamente

$$\{a'_1\overset{\times\times}{n}+a'_2\overset{\times\times}{n^2}+\cdots+a'_{m-1}\overset{\times\times}{n^{m-1}}\}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=\{a'_1\alpha+\cdots+a'_{m-1}\alpha^{m-1}\}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}),$$

cioè della (6)

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=f_1(\alpha)\cdot\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}). \tag{7}$$

Ora $f_1(\alpha)$ è data da

$$\lim_{\xi=\alpha}\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=f'(\alpha)=\mathrm{A}$$

che è differente da zero, essendo $\alpha, \beta, \dots$ tutte distinte.

Quindi risulta:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\cdot\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})=\mathrm{A}\,\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}).$$

Epperò, posto $\overset{\times\times}{f}_1(\overset{\times\times}{n}) = \mathrm{A} g_1$, da essa si trae subito

$$\mathrm{A}^2 \overset{\times\times}{g}{}_1^2 = \mathrm{A}^2 g_1 ,$$

cioè

$$\overset{\times\times}{g}{}_1^2 = g_1 .$$

Questa è l'equazione di Lalesco, di cui la soluzione è data da:

$$g_1 = \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\varphi}_r(x)\, \boldsymbol{\psi}_r(y) , \tag{8}$$

con $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ formanti sistema biortogonale.

3. In un modo del tutto analogo, partendo da

$$\overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) = (\overset{\times\times}{n} - \beta)[\overset{\times\times}{n}(\overset{\times\times}{n} - \alpha)(\overset{\times\times}{n} - \gamma \cdots] = (\overset{\times\times}{n} - \beta)\overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n})$$

si trae:

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{\times\times}{n}\, \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = \beta\, \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) \\ \overset{\times\times}{n}{}^2\, \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = \beta^2\, \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \overset{\times\times}{n}{}^{m-1}\, \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = \beta^{m-1}\, \overset{\times\times}{f}(\overset{\times\times}{n}) \end{array}\right. \tag{9}$$

e quindi, detti $a_1'', a_2'', a_3'', \dots a_{m-1}'' = 1$, i coefficienti delle potenze di ξ nel polinomio:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \beta} ,$$

avremo, dopo moltiplicato per le a'' e sommato:

$$\overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = f_2(\beta) \cdot \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) :$$

ove

$$f_2'(\beta) = f'(\beta) = \mathrm{B} .$$

E quindi, ritrarremo:

$$\overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = \mathrm{B} g_2 ,$$

ove

$$\overset{\times\times}{g}{}_2^2 = g_2 .$$

4. D'altra parte però, se noi moltiplichiamo la prima delle (9) per a_1', la seconda per a_2', ... e sommiamo, avremo ovviamente

$$(a_1' n + a_2' \overset{\times\times}{n}{}^2 + \cdots + a_{m-1}' \overset{\times\times}{n}{}^{m-1}) \cdot \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n}) = (a_1' \beta + \cdots + a_{m-1}' \beta^{m-1})\, \overset{\times\times}{f}_2(\overset{\times\times}{n})$$

cioè,

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = f_1(\beta) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n})\,;$$

e reciprocamente, moltiplicando le (5) per le a'', avremo:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = f_2(\alpha)\, \overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n})\,,$$

ma, si vede che:

$$f_1(\beta) = f_2(\alpha) = 0\,;$$

quindi, avremo:

$$\overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = 0\,,$$

oppure anche:

$$\overset{\times\times}{g_1} \cdot \overset{\times\times}{g_2} = 0 = \overset{\times\times}{g_2}\, \overset{\times\times}{g_1}\,;$$

cioè i nuclei $g_2\, g_1$ devono essere ortogonali, pur essendo ciascuno di essi della forma (9); il che è possibile solo se, avendo posto:

$$g_1 = \Sigma\, \varphi'_s(x)\, \psi'_s(y)$$
$$g_2 = \Sigma\, \varphi''_s(x)\, \psi''_s(y)\,,$$

sieno le φ'' ortogonali a tutte le ψ'_1 e le φ' tutte le ortogonali alle ψ''. Ossia le φ', φ'' ; ψ', ψ'' formano ancora due sistemi biortogonali.

In modo identico, si otterrebbero le equazioni;

$$(10) \qquad \overset{\times\times}{f_3}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_3}(\overset{\times\times}{n}) = \mathrm{C}\, \overset{\times\times}{f_3}(\overset{\times\times}{n})\,, \ldots \overset{\times\times}{f}_{m-1}(\overset{\times\times}{n})\, \overset{\times\times}{f}_{m-1}(\overset{\times\times}{n}) = \mathrm{M}\, \overset{\times\times}{f}_{m-1}(\overset{\times\times}{n})$$
$$\overset{\times\times}{f_r}(\overset{\times\times}{n}) \cdot \overset{\times\times}{f_s}(\overset{\times\times}{n}) = 0 \qquad (r \neq s)\,.$$

Si deduce quindi che, dette $\varphi_1 \ldots$; $\psi_1 \ldots$ le funzioni di due sistemi biortogonali, avremo:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{\times\times}{f_1}(\overset{\times\times}{n}) = a'_1\, n + a'_2\, \overset{\times\times}{n^2} + \cdots + a'_{m-1}\, \overset{\times\times}{n^{m-1}} = \mathrm{A} \cdot \sum_1^p \varphi_i(x)\, \psi_i(y) \\ \overset{\times\times}{f_2}(\overset{\times\times}{n}) = a''_1\, n + a''_2\, \overset{\times\times}{n^2} + \cdots + a''_{m-1}\, \overset{\times\times}{n^{m-1}} = \mathrm{B} \cdot \sum_{p+1}^q \varphi_i(x)\, \psi_s(y) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{\times\times}{f}_{m-1}(\overset{\times\times}{n}) = a_1^{(m-1)}\, n + \cdots + a_{m-1}^{(m-1)}\, \overset{\times\times}{n^{m-1}} = \mathrm{M} \sum_{t+1}^u \varphi_p(x)\, \psi_p(y)\,. \end{array} \right.$$

Epperò avremo:

$$n = \sum_i \left[\varphi_i(x)\, \psi_i(y)\right] \cdot \alpha_i = \frac{\mathrm{AA}'_1}{\Delta} \sum_1^p \varphi_i(x)\, \psi_i(y) + \frac{\mathrm{BA}''_1}{\Delta} \sum_{p+1}^q \varphi_i(x)\, \psi_j(y) + \cdots$$

ove Δ è il determinante delle $a'_1, \ldots$; ed $\mathrm{A}_1^{(r)}$ sono i complementi algebrici degli elementi della prima colonna.

E, senza calcoli, si vede subito che le α_i, devono necessariamente coincidere con una delle radici della (2); poichè sarà

$$\overset{\times\times}{n}{}^2 = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y)\, \alpha_i^2\, ; \ldots ; \overset{\times\times}{n}{}^m = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y)\, \alpha_i^m\, ,$$

e quindi, moltiplicando rispettivamente per le a e sommando:

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = 0 = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y)\, f(\alpha_i)$$

che non può essere soddisfatta altrimenti che ponendo

$$f(\alpha_i) = 0 . \qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots)$$

5. Quindi riassumendo:

La soluzione generale dell'equazione

$$\overset{\times\times}{f}\,(\overset{\times\times}{n}) = a_1\, n + a_2\, \overset{\times\times}{n}{}^2 + \cdots + a_m\, \overset{\times\times}{n}{}^m = 0\, ,$$

nell'ipotesi che l'equazione algebrica

$$f(\xi) = a_1\, \xi + a_2\, \xi^2 + \ldots + a_m\, \xi^m = 0$$

abbia tutte le radici semplici, è data da

$$n = \sum_h \left(\sum\nolimits_i \varphi_i(x)\, \psi_i(y) \right) a_h\, ,$$

ove le φ, ψ, *formano un sistema di funzioni biortogonali, e le* α_h *sono radici della equazione algebrica scritta* (che chiameremo equazione caratteristica).

6. Notiamo infine che per risolvere il sistema (11) si poteva usare il seguente artificio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} a_1'\, \xi + a_2'\, \xi^2 + \cdots + a_{m-1}'\, \xi^{m-1} = \mathrm{A} \\ a_1''\, \xi + \cdots\cdots\cdots + a_{m-1}''\, \xi^{m-1} = 0 \\ \;.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad = 0 \end{cases}$$

il quale è soddisfatto da $\xi = a$, poichè i membri sinistri sono rispettivamente

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha}\, ;\ \frac{f(\xi)}{\xi - \beta}\, ; \ldots$$

ed inoltre

$$\mathrm{A} = f'(a) = \lim_{\xi = \alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha}\, .$$

Scrivendo la formola di soluzione, si ottiene:

$$\alpha = \frac{AA_1'}{\Delta}.$$

In modo del tutto analogo, dal sistema

$$\begin{cases} a_1' \, \xi + \cdots + a_{m-1}' \, \xi^{m-1} = 0 \\ a_1'' \, \xi + \cdots + a_{m-1}'' \, \xi^{m-1} = B \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases}$$

soddisfatto da $\xi = \beta$, si trae senz'altro $\beta = \frac{BA_1''}{\Delta}$ e così via; come dovevamo trovare.

Il che ci permette, passando anche ai complementi algebrici delle altre colonne, di scrivere più generalmente:

$$\alpha^r = \frac{AA_r'}{\Delta}\,;\ \beta^r = \frac{BA_r''}{\Delta}\,;\ldots\ \mu^r = \frac{MA_r^{(m-1)}}{\Delta}.$$

Quindi possiamo anche enunciare il seguente teorema sui determinanti:

Dato un polinomio $h(x)$ a radici semplici (fra cui vi sia lo zero); se noi scriviamo ordinatamente in una matrice quadrata i coefficienti dei quozienti $\frac{h(x)}{x-\alpha}$, α essendo radice diversa da zero del polinomio dato, ponendovi in linea quelli appartenenti allo stesso quoziente, allora il complemento algebrico d'un elemento di questo determinante, appartenente alla linea r-sima ed alla colonna s-sima, ha per valore

$$A_r^{(s)} = \frac{\Delta}{h'(\alpha_r)}\,\alpha_r^{s-1}.$$

Per dimostrarlo, basta porre in tutto il ragionamento precedente

$$f(x) = h(x),$$