ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terzo ordine.* Nota di LUIGI BERZOLARI, presentata dal Socio E. BERTINI [1].

Nel presente lavoro, che si collega con un altro di recente inserito in questi Rendiconti [2], mi propongo d'invertire alcune note proprietà di cui godono le 27 rette e i 45 piani tritangenti di una superficie del terz'ordine, dimostrando il teorema seguente:

Si abbia una configurazione di x rette (di cui tre qualunque non concorrenti in un punto) ed y piani, tali che per ognuna delle rette passino k dei piani e su ognuno dei piani giacciano tre delle rette. E si suppongano soddisfatte le altre due condizioni:

(I) *se due delle x rette s'incontrano, il loro piano sia uno degli y considerati, epperò contenga un'altra di quelle rette;*

(II) *se una delle x rette ed uno degli y piani non si appartengono, il loro punto d'incontro giaccia sopra una delle tre rette poste sul piano.*

Allora (per $k > 2$) la configurazione o consta delle 27 rette e dei 45 piani tritangenti di una superficie cubica, o consta delle 15 rette di una superficie cubica, che rimangono togliendo le rette di una bissestupla, e dei 15 piani che le contengono a tre a tre.

Per semplicità, la dimostrazione sarà esposta in forma indipendente dalla cognizione della Nota citata.

1. Anzitutto si ha ovviamente

$$kx = 3y.$$

Inoltre, per la proprietà (I), ciascuna delle x rette ne taglia altre $2k$, poste a due a due nei k piani passanti per la retta. Fissando quindi uno qualunque degli y piani, e considerando le rette che si appoggiano all'una o all'altra o alla terza delle rette in esso contenute, per la proprietà (II) si ha

$$2 \cdot 3(k-1) + 3 = x,$$

epperò

(1) $$x = 3(2k-1),$$

(2) $$y = k(2k-1).$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 21 ottobre 1916.

[2] *Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani*, questo vol., pag. 258.

Per $k=1$ la configurazione si riduce ad un unico piano ed a tre sue rette; per $k=2$ essa consta di due terne di piani e delle nove rette in cui i piani dell'una terna incontrano i piani dell'altra.

Nel seguito potremo dunque supporre

$$k \geq 3\,, \quad \text{epperò} \quad x \geq 15\,,\ y \geq 15\,. \tag{3}$$

2. Ciò posto, se a_1, a_2, a_3 sono tre delle x rette situate in un piano α, per ciascuna di esse passano altri $k-1$ degli y piani, cosicchè, compreso α, si hanno in tutto $3(k-1)+1$, ossia $3k-2$ piani. Questo numero, certamente non superiore ad y, non è neanche eguale ad y, altrimenti per la (2) avremmo l'assurdo $(k-1)^2 \leq 0$.

Pertanto, fissato il piano α, esiste nella configurazione qualche altro piano che non lo incontra in nessuna delle sue tre rette. Sia β un tal piano, e siano b_1, b_2, b_3 le sue tre rette. Per la proprietà (II), la retta b_1 incontra α in un punto che si può supporre appartenere ad a_1. La retta b_2 incontra similmente α in un punto di una delle sue tre rette; ma non può incontrare a_1, altrimenti α e β avrebbero in comune a_1: possiamo supporre che b_2 tagli a_2; e allora b_3 taglierà a_3.

Siano c_1, c_2, c_3 le rette poste ulteriormente nei piani $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$: dico che sono distinte dalle sei rette precedenti e distinte tra loro, e che si tagliano a due a due.

Anzitutto, se c_1 coincidesse per es. con a_2, la retta a_3 coinciderebbe con b_1, sicchè α e β si taglierebbero in una delle x rette.

In secondo luogo, se ad es. c_2 coincidesse con c_1, questa, secando a_1 e a_2, coinciderebbe con a_3, e secando b_1 e b_2, coinciderebbe con b_3, donde l'assurdo di poc'anzi.

Per dimostrare infine che ad es. c_1 taglia c_2, basta osservare che c_1 taglia il piano $a_2 b_2 c_2$ in un punto di una di queste tre rette. Ma non taglia a_2, altrimenti, tagliando già a_1, coinciderebbe con a_3, e non taglia b_2, perchè, tagliando già b_1, coinciderebbe con b_3.

Le tre nuove rette c_1, c_2, c_3 stanno quindi in un medesimo piano; cosicchè, formando il quadro

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,. \tag{4}$$

si ha la proprietà che *due delle nove rette si tagliano quando e soltanto quando figurano in una stessa linea orizzontale o verticale.*

È chiaro che, se il quadro (4) si considera come la matrice di un determinante, *ogni altra retta della configurazione incontra tre delle nove rette del quadro, appartenenti ad un termine del determinante.*

3. Siano $b_2^{(1)} b_3^{(1)}$, $b_2^{(2)} b_3^{(2)}$, ..., $b_2^{(k-2)} b_3^{(k-2)}$ le coppie di rette [tutte distinte tra loro e dalle nove del quadro (4)] contenute nei $k-2$ piani della configurazione che, oltre ai piani $a_1 b_1 c_1$ e $b_1 b_2 b_3$, passano per b_1. Considerando i due piani $a_1 a_2 a_3$ e $b_1 b_2^{(i)} b_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., k-2)$, poichè a_1 seca b_1, possiamo supporre ad es. che a_2 tagli $b_2^{(i)}$, e quindi che a_3 tagli $b_3^{(i)}$. Se la terza retta della configurazione posta sul piano $a_2 b_2^{(i)}$ si denota con $c_2^{(i)}$, e la terza contenuta nel piano $a_3 b_3^{(i)}$ con $c_3^{(i)}$, con gli stessi ragionamenti del num. precedente si dimostra che le rette $c_2^{(i)}$ e $c_3^{(i)}$ sono tutte diverse tra loro e dalle precedenti, e inoltre che c_1, $c_2^{(i)}$ e $c_3^{(i)}$ sono in un piano.

Risulta così lo schema

$$\text{(5)} \qquad \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 & & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & b_1 & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} & \cdots & b_1 & b_2^{(k-2)} & b_3^{(k-2)} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & c_1 & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & & c_1 & c_2^{(k-2)} & c_3^{(k-2)} \end{array}\right| ,$$

dove tre rette, che in uno qualunque dei quadri parziali stiano in una medesima orizzontale o verticale, appartengono ad uno stesso piano.

Si ottengono tutte le x rette della configurazione aggiungendo alle precedenti le $k-2$ coppie

$$\text{(6)} \qquad f_1 g_1, \; f_2 g_2, \; \ldots, \; f_{k-2} g_{k-2}$$

che, oltre ad $a_2 a_3$ e $b_1 c_1$, stanno in piani passanti per a_1.

4. Delle rette del piano $c_1 c_2 c_3$, la $b_2^{(i)}$ non taglia c_1; e neanche taglia c_2, altrimenti, tagliando già a_2, coinciderebbe con b_2. Dunque $b_2^{(i)}$ taglia c_3. Poichè a_1 non seca nè c_3 nè $b_2^{(i)}$, la terza retta della configurazione esistente sul piano $c_3 b_2^{(i)}$ si appoggierà ad a_1, epperò sarà una delle rette (6). Ma se si considerano due di tali piani, $c_3 b_2^{(i)}$ e $c_3 b_2^{(j)}$, le terze rette in essi contenute sono distinte e non s'incontrano; si può quindi supporre che nel piano $c_3 b_2^{(i)}$ la terza retta sia f_i. Risultano così i $k-2$ piani

$$\text{(7)} \qquad c_3 b_2^{(1)} f_1, \; c_3 b_2^{(2)} f_2, \; \ldots, \; c_3 b_2^{(k-2)} f_{k-2}.$$

Considerando di nuovo il piano $c_1 c_2 c_3$, si riconosce in modo analogo che $b_3^{(i)}$ seca c_2; e ancora la terza retta del piano $c_2 b_3^{(i)}$ dev'essere una delle (6). Ma poichè nei piani $c_3 b_2^{(i)} f_i$ e $c_2 b_3^{(i)}$ si tagliano le rette c_3 e c_2, come pure le $b_2^{(i)}$ e $b_3^{(i)}$, la f_i taglierà la terza retta del piano $c_2 b_3^{(i)}$, la quale sarà dunque g_i. Si hanno così gli altri $k-2$ piani

$$\text{(8)} \qquad c_2 b_3^{(1)} g_1, \; c_2 b_3^{(2)} g_2, \; \ldots, \; c_2 b_3^{(k-2)} g_{k-2}.$$

Similmente, con la considerazione del piano $b_1 b_2 b_3$, si prova l'esistenza dei piani

$$\text{(9)} \qquad b_3 c_2^{(1)} g_1, \; b_3 c_2^{(2)} g_2, \; \ldots, \; b_3 c_2^{(k-2)} g_{k-2},$$

e quella dei piani

(10) $$b_2\,c_3^{(1)} f_1\,,\ b_2\,c_3^{(2)} f_2\,,\ \ldots\,,\ b_2\,c_3^{(k-2)} f_{k-2}\,.$$

5. Avendo supposto $k \geq 3$, lo schema (5) consta almeno dei due primi quadri parziali, e consta soltanto di questi quando sia $k = 3$, epperò $x = y = 15$.

Suppongasi invece $k > 3$. Allora lo schema (5) si compone almeno dei tre primi quadri parziali, e certamente esiste il piano $a_3\,b_3^{(2)}\,c_3^{(2)}$. Delle rette di questo piano, la $b_2^{(1)}$ non taglia a_3; e neppure taglia $b_3^{(2)}$, altrimenti, tagliando già b_1, coinciderebbe con $b_2^{(2)}$. Dunque $b_2^{(1)}$ taglia $c_3^{(2)}$.

La retta a_1, non secando nè $b_2^{(1)}$ nè $c_3^{(2)}$, incontrerà la terza retta del piano da esse determinato, sicchè questa terza retta sarà una delle (6). Ma non può essere nè g_1 nè g_2 nè alcuna delle $f_1\,, f_2\,, \ldots, f_{k-2}$. Non g_1, altrimenti il piano $b_2^{(1)}\,c_3^{(2)}\,g_1$ e il primo dei piani (8), cioè $c_2\,b_3^{(1)}\,g_1$, pur passando per la stessa retta g_1, conterrebbero le due rette incidenti $b_2^{(1)}$ e $b_3^{(1)}$. Non g_2, chè il piano $b_2^{(1)}\,c_3^{(2)}\,g_2$ e il secondo dei piani (9), ossia $b_3\,c_2^{(2)}\,g_2$, avrebbero in comune la retta g_2, mentre le loro rette $c_3^{(2)}$ e $c_2^{(2)}$ s'incontrano. Non, finalmente, alcuna delle $f_1\,, f_2\,, \ldots, f_{k-2}$. Poichè, se fosse f_1, dall'esistenza del primo dei piani (7) seguirebbe che c_3 coincide con $c_3^{(2)}$. Se invece fosse una delle $f_2\,, f_3\,, \ldots, f_{k-2}$, diciamo f_i, il piano $b_2^{(1)}\,c_3^{(2)} f_i$ e l'i^{mo} dei piani (7), cioè $c_3\,b_2^{(i)} f_i$, avrebbero in comune la retta f_i, mentre le loro rette $b_2^{(1)}$ e c_3 s'incontrano, come risulta dall'esistenza del primo dei piani (7).

La terza retta del piano $b_2^{(1)}\,c_3^{(2)}$ è dunque una delle $g_3\,, g_4\,, \ldots, g_{k-2}$, cosichè resta intanto provato essere $k \geq 5$. Ma si può aggiungere che è precisamente $k = 5$, e per ciò basta dimostrare che quella terza retta è una qualunque delle $g_3\,, g_4\,, \ldots, g_{k-2}$, ossia che queste incontrano tutte sia $b_2^{(1)}$ che $c_3^{(2)}$.

A tal fine consideriamo uno qualunque dei piani (9) successivi al primo, e sia

$$b_3\,c_2^{(i)}\,g_i \qquad (i = 2\,, 3\,, \ldots, k-2).$$

Delle sue tre rette, la $b_2^{(1)}$ non seca b_3, poichè, secando già b_1, coinciderebbe con b_2; e neppure seca $c_2^{(i)}$, poichè, secando già a_2, coinciderebbe con $b_2^{(i)}$. Dunque $b_2^{(1)}$ seca $g_2\,, g_3\,, \ldots, g_{k-2}$.

Si consideri in secondo luogo uno qualunque dei piani (8) successivi ai due primi, e sia

$$c_2\,b_3^{(i)}\,g_i \qquad (i = 3\,, 4\,, \ldots, k-2).$$

Delle rette in esso contenute, la $c_3^{(2)}$ non taglia c_2, altrimenti, tagliando già c_1, coinciderebbe con c_3, e neppure taglia $b_3^{(i)}$, poichè, incontrando già a_3, coinciderebbe con $c_3^{(i)}$. Dunque $c_3^{(2)}$ incontra $g_3\,, g_4\,, \ldots, g_{k-2}$.

6. Riassumendo, abbiamo dimostrato che nelle ipotesi ammesse sono possibili due soli casi:

$$k = 3\,, \quad \text{epperò} \quad x = 15\,,\ y = 15\,;$$
$$k = 5\,, \quad \text{epperò} \quad x = 27\,,\ y = 45\,.$$

Nell'uno e nell'altro, le x rette della configurazione appartengono ad una (sola) superficie del terzo ordine, irriducibile e non rigata. Infatti le nove rette del quadro (4) formano la base di un fascio di superficie cubiche, determinato dalle due terne di piani contenenti le rette delle righe orizzontali e verticali del quadro stesso. Poichè $b_2^{(1)}$ si appoggia a tre delle nove rette, esiste nel fascio una superficie F, ed una sola, che contiene $b_2^{(1)}$, e ad F appartengono anche tutte le rimanenti rette della configurazione, poichè ciascuna ha con F più di tre punti comuni. Che F sia irriducibile e non rigata, è evidente.

7. È facile, nel primo caso, trovare le rimanenti dodici rette di F, e riconoscere che costituiscono una bissestupla.

Intanto osserviamo che i cinque piani della configurazione diversi dai dieci compresi nello schema (5), il quale si riduce ora ai soli due primi quadri, sono i seguenti:

$$a_1 f_1 g_1 \quad , \quad c_3 b_2^{(1)} f_1 \quad , \quad c_2 b_3^{(1)} g_1 \quad , \quad b_3 c_2^{(1)} g_1 \quad , \quad b_2 c_3^{(1)} f_1\,,$$

di cui gli ultimi quattro figurano nei gruppi (7), (8), (9) e (10).

Ora consideriamo ad es. le due terne di rette

$$b_2^{(1)} c_3^{(1)} g_1 \quad , \quad c_2^{(1)} b_3^{(1)} f_1\,, \tag{11}$$

le quali sono generatrici d'uno stesso iperboloide, appartenenti a schiere diverse. Com'è noto (¹), esistono su F due, e due sole, bissestuple

$$\begin{matrix} b_2^{(1)} c_3^{(1)} g_1\, p_1\, p_2\, p_3 \\ q_1\, q_2\, q_3\, c_2^{(1)} b_3^{(1)} f_1 \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} b_2^{(1)} c_3^{(1)} g_1\, p_1'\, p_2'\, p_3' \\ q_1'\, q_2'\, q_3'\, c_2^{(1)} b_3^{(1)} f_1 \end{matrix}$$

contenenti le sei rette (11). Le dodici rette p_i, q_i, p_i', q_i', evidentemente distinte dalle (11), sono anche distinte da quelle del quadro (4), poichè non incontrano alcuna retta dell'una o dell'altra delle due terne (11). Ora si sa (²) che le sei rette della prima bissestupla non comuni alla seconda, e

(¹) H. Schröter, *Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung*, Giorn. di Crelle, Bd. 62 (1863), pag. 277; R. Sturm, *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*, Leipzig 1867, pag. 55.

(²) Cremona, *Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*, Mem. della R. Accad. dei Lincei, ser. 3ª, vol. I (1877), pag. 854 (n. 43); *Opere mat.*, tomo III, Milano 1917, pag. 422.

le sei rette della seconda non comuni alla prima, costituiscono insieme una nuova bissestupla

$$\begin{matrix} p_1\, p_2\, p_3 & q'_1\, q'_2\, q'_3 \\ p'_1\, p'_2\, p'_3 & q_1\, q_2\, q_3\,. \end{matrix}$$

8. Un semplice corollario del teorema stabilito è la nota proprietà che *una configurazione di 15 rette* (*tre qualunque delle quali non passanti per uno stesso punto*), *situate a tre a tre su 15 piani, consta necessariamente delle rette di una superficie cubica escluse da una bissestupla.*

È chiaro infatti che per una tale configurazione sono soddisfatte tutte le ipotesi da cui siamo partiti in questa Nota.

Matematica. — *Sulle discontinuità delle funzioni e delle loro derivate attraverso una superficie.* Nota di P. BURGATTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

4. — DISCONTINUITÀ DEI POTENZIALI NEWTONIANI.

Ricordando che l'invariante primo di $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ è *div* $\mathbf{u}$, e quello d'una diade è il prodotto scalare dei due vettori che la caratterizzano, si ha, nel caso della (8),

$$(8') \qquad [\operatorname{div} \mathbf{u}] = \mathbf{n} \times \mathbf{v}\,,$$

e in quello della (9)

$$(9') \qquad [\operatorname{div} \mathbf{u}] = \operatorname{div} [\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v}\,,$$

le quali definiscono la discontinuità della divergenza di $\mathbf{u}$.

Analogamente, rammentando che il vettore di $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ è *rot* $\mathbf{u}$, e quello d'una diade è il prodotto vettoriale dei suoi due vettori, risulta chiaramente dalle (8) e (9), secondo che $\mathbf{u}$ è continuo o discontinuo,

$$(10) \qquad [\operatorname{rot} \mathbf{u}] = \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} \quad , \quad [\operatorname{rot} \mathbf{u}] = \operatorname{rot} [\mathbf{u}] + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}\,.$$

Nel caso in cui sia $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi$, in virtù delle (5), (6), (8) e (9), si ha in generale

$$(11) \qquad \left[\frac{d \operatorname{grad} \varphi}{d\mathrm{M}}\right] = \frac{d \operatorname{grad} [\varphi]}{d\mathrm{P}} + \frac{d(m\mathbf{n})}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,, \mathbf{v})\,;$$

[1] Questa Nota fa seguito alla precedente negli stessi Rendiconti. Per chiarezza, a quella si collegano progressivamente i numeri dei paragrafi e delle formule.