ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

le sei rette della seconda non comuni alla prima, costituiscono insieme una nuova bissestupla

$$\begin{matrix} p_1\, p_2\, p_3 & q'_1\, q'_2\, q'_3 \\ p'_1\, p'_2\, p'_3 & q_1\, q_2\, q_3\,. \end{matrix}$$

8. Un semplice corollario del teorema stabilito è la nota proprietà che *una configurazione di 15 rette* (*tre qualunque delle quali non passanti per uno stesso punto*), *situate a tre a tre su 15 piani, consta necessariamente delle rette di una superficie cubica escluse da una bissestupla.*

È chiaro infatti che per una tale configurazione sono soddisfatte tutte le ipotesi da cui siamo partiti in questa Nota.

Matematica. — *Sulle discontinuità delle funzioni e delle loro derivate attraverso una superficie.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

4. — Discontinuità dei potenziali newtoniani.

Ricordando che l'invariante primo di $\frac{d\mathbf{u}}{dM}$ è *div* $\mathbf{u}$, e quello d'una diade è il prodotto scalare dei due vettori che la caratterizzano, si ha, nel caso della (8),

$$[\mathrm{div}\,\mathbf{u}] = \mathbf{n} \times \mathbf{v}\,, \tag{8'}$$

e in quello della (9)

$$[\mathrm{div}\,\mathbf{u}] = \mathrm{div}\,[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v}\,, \tag{9'}$$

le quali definiscono la discontinuità della divergenza di $\mathbf{u}$.

Analogamente, rammentando che il vettore di $\frac{d\mathbf{u}}{dM}$ è *rot* $\mathbf{u}$, e quello d'una diade è il prodotto vettoriale dei suoi due vettori, risulta chiaramente dalle (8) e (9), secondo che $\mathbf{u}$ è continuo o discontinuo,

$$[\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathbf{n} \wedge \mathbf{v} \quad , \quad [\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathrm{rot}\,[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \wedge \mathbf{v}\,. \tag{10}$$

Nel caso in cui sia $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$, in virtù delle (5), (6), (8) e (9), si ha in generale

$$\left[\frac{d\,\mathrm{grad}\,\varphi}{dM}\right] = \frac{d\,\mathrm{grad}\,[\varphi]}{dP} + \frac{d(m\mathbf{n})}{dP} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{v})\,; \tag{11}$$

[1] Questa Nota fa seguito alla precedente negli stessi Rendiconti. Per chiarezza, a quella si collegano progressivamente i numeri dei paragrafi e delle formule.

ritenendo $[\varphi]=0$ quando φ è continua. Ne consegue che la discontinuità attraverso σ della derivata di grad φ rispetto a M, e perciò di tutte le derivate seconde in qualsiasi direzione, è definita dalle discontinuità della funzione e delle derivate normali della funzione e del suo gradiente.

Infine, ricordando che l'operatore di Laplace per le grandezze scalari è

$$\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad},$$

dalla considerazione degl' invarianti primi d'ambo i membri della (11) si deduce

$$[\Delta\varphi] = \Delta[\varphi] + m \operatorname{div}\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\mathbf{v},$$

con $[\varphi]=0$ quando φ è continua attraverso σ [1].

Sia φ un potenziale newtoniano d'uno strato di materia distribuita su σ con densità μ. Per cose note, si ha in questo caso

$$[\varphi]=0 \quad , \quad m = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] = 4\pi\mu \quad , \quad [\Delta\varphi]=0\,;$$

perciò

$$-4\pi\mu \operatorname{div}\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\mathbf{v} = 0$$

ossia

$$\mathbf{v} = 4\pi \left\{ \mathbf{a} + (\mu \operatorname{div}\mathbf{n})\,\mathbf{n} \right\}$$

essendo $\mathbf{a}$ un vettore tangenziale. Ne consegue per la (11)

$$\left[\frac{d \operatorname{grad}\varphi}{d\mathrm{M}}\right] = -4\pi\frac{d(\mu\mathbf{n})}{d\mathrm{P}} + 4\pi\,\mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{a} + (\mu\operatorname{div}\mathbf{n})\,\mathbf{n})\,,$$

che *definisce la natura delle discontinuità di tutte le derivate di secondo ordine in qualsiasi direzione.*

In modo analogo, se φ è un potenziale di doppio strato, essendo per cose note

$$[\varphi] = 4\pi\mu \qquad m = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] = 0 \qquad [\Delta\varphi] = 0\,,$$

risulta

$$\left[\frac{d \operatorname{grad}\varphi}{d\mathrm{M}}\right] = 4\pi\frac{d \operatorname{grad}\mu}{d\mathrm{P}} + 4\pi\,\mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{a} - \Delta\mu\,\mathbf{n})\,.$$

[1] $\operatorname{div}(m\mathbf{n}) = m\operatorname{div}\mathbf{n} + \operatorname{grad} m \times \mathbf{n}$; ma $\operatorname{grad} m \times \mathbf{n} = \operatorname{grad}_\sigma m \times \mathbf{n} = 0$ perchè m è definita soltanto su σ. Si noti che $\operatorname{div}\mathbf{n}$ rappresenta la *curvatura media* di σ; perchè, in coordinate cartesiane ad esempio, risulta

$$\operatorname{div}\mathbf{n} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

estendo X Y Z i coseni di direzione di $\mathbf{n}$.

5. — Discontinuità nella deformazione dei corpi elastici.

Supponiamo che $\mathbf{u}(\mathrm{M})$ definisca lo spostamento di M in una deformazione infinitesima d'un solido elastico. Se l'omografia $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ della deformazione è discontinua attraverso σ (e lo sarà certamente se $\mathbf{u}$ ha discontinuità variabile), la sua discontinuità sarà del tipo (9). Ma potrebbe essere discontinua la dilatazione $\mathrm{D}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ (che definisce la pura deformazione) e continuo il vettore rot $\mathbf{u}$; oppure, continua la dilatazione e discontinua la rotazione di $\mathbf{u}$. Affinchè accada il primo caso occorre che risulti

$$[\mathrm{rot}\,\mathbf{u}] = \mathrm{rot}[\mathbf{u}] + \mathbf{n}\wedge\mathbf{v} = 0.$$

Ponendo $\mathbf{v} = c\mathbf{n} + \mathbf{v}_\sigma$, ove $\mathbf{v}_\sigma$ è un vettore tangenziale; indi, moltiplicando prima scalarmente e poi vettorialmente per $\mathbf{n}$, si deduce

$$\mathrm{rot}[\mathbf{u}]\times\mathbf{n} = 0 \tag{12}$$

$$\mathbf{v} = c\mathbf{n} + \mathbf{n}\wedge\mathrm{rot}[\mathbf{u}]. \tag{12'}$$

Concludiamo: *Se le discontinuità attraverso σ dello spostamento e della sua derivata normale soddisfano alle* (12) *e* (12'), *allora, e allora soltanto, sarà continua la rotazione e discontinua la pura deformazione, con discontinuità definita da*

$$\left[\mathrm{D}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}\right] = \mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{DH}(\mathbf{n}\,,\,c\mathbf{n} + \mathbf{n}\wedge\mathrm{rot}[\mathbf{u}]).$$

In particolare, se $\mathbf{u}$ è continuo, le precedenti condizioni si riducono a $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$. Il lettore potrà verificare, per esempio, che le (12) e (12') sono soddisfatte per $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$, essendo φ un potenziale di semplice strato relativo a σ.

Affinchè accada il secondo caso accennato di sopra, occorre che sia [1]

$$2\mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} + \mathrm{H}(\mathbf{n}\,,\mathbf{v}) + \mathrm{H}(\mathbf{v}\,,\mathbf{n}) = 0$$

Prendendo l'invariante primo si trae intanto

$$\mathrm{div}[\mathbf{u}] + \mathbf{n}\times\mathbf{v} = 0.$$

Inoltre, notando che

$$2\mathrm{D}\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}}\mathbf{n} = 2\frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}}\mathbf{n} - \mathrm{rot}[\mathbf{u}]\wedge\mathbf{n} = -\mathrm{rot}[\mathbf{u}]\wedge\mathbf{n}\,,$$

[1] Il doppio della dilatazione d'una diade è uguale alla diade stessa più la sua coniugata, che si ottiene scambiando l'ordine dei vettori.

si deduce ancora

$$-\operatorname{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n} + \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{n})\, \mathbf{n} = 0\,;$$

la quale, moltiplicata scalarmente per $\mathbf{n}$, dà $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0$. Dunque

$$(13) \quad \operatorname{div}[\mathbf{u}] = 0 \qquad (14) \quad \mathbf{v} = \operatorname{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n}\,.$$

Dopo ciò la condizione precedente diventa

$$(13') \qquad \mathrm{D}\,\frac{d[\mathbf{u}]}{dP} + \mathrm{DH}(\mathbf{n}\,, \operatorname{rot}[\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n}) = 0.$$

Concludiamo pertanto: *Se la discontinuità dello spostamento soddisfa le* (13) *e* (13′) *e quella della sua derivata normale è definita dalla* (14), *allora, e soltanto allora, sarà continua la dilatazione e discontinuo il vettore.*

Quando $\mathbf{u}$ è continuo, le condizioni precedenti son soddisfatte; ma risultando $\mathbf{v} = 0$, la (8) dà $\left[\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] = 0$; perciò la continuità dello spostamento e della pura deformazione portano di conseguenza anche la continuità della rotazione.

Vogliasi ora che sia continua l'omografia (dilatazione)

$$\beta = -a \operatorname{div} \mathbf{u} - b\,\mathrm{D}\,\frac{d\mathbf{u}}{dM} \qquad (a \text{ e } b \text{ costanti}),$$

che è quella delle tensioni elastiche, nel caso dei corpi isotropi (¹). Dovrà risultare

$$a\,[\operatorname{div} \mathbf{u}] + b \left[\mathrm{D}\,\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] = 0\,;$$

ossia per le (9) e (9′)

$$a\,(\operatorname{div}[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v}) + b\left(\mathrm{D}\,\frac{d[\mathbf{u}]}{dP} + \mathrm{DH}\,(\mathbf{n}\,, \mathbf{v})\right) = 0\,.$$

Prendendo l'invariante primo risulta (²)

$$\operatorname{div}[\mathbf{u}] + \mathbf{n} \times \mathbf{v} = 0\,;$$

e però

$$\left(\mathrm{D}\,\frac{d[\mathbf{u}]}{dP} + \mathrm{DH}\,(\mathbf{n}\,, \mathbf{v})\right) = \left[\mathrm{D}\,\frac{d\mathbf{u}}{dM}\right] = 0$$

(¹) An. Vect. Gen., T. II, pag. 29.
(²) L'invariante primo d'uno scalare è tre volte lo scalare.

Dunque sarà continua anche la pura deformazione; onde si ricade sul teorema precedente.

Parecchi altri problemi si possono trattare con questi principî. Per brevità ne considereremo un altro soltanto utile nella teoria dell'elasticità.

Insieme alla discontinuità dello spostamento $\mathbf{u}$, poniamo la condizione che sia continuo il vettore

$$a \operatorname{div} \mathbf{u} \, . \, \mathbf{n} + b \, \mathrm{D} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}} \mathbf{n}$$

nei punti $\mathrm{M} = \mathrm{P}$ di σ; vettore che definisce le pressioni sugli elementi di σ. Per le cose viste di sopra dovrà risultare

$$a \left(\operatorname{div} [u] \, . \, n + (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \, \mathbf{n} \right) + b \left(\mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} + \mathrm{DH} (\mathbf{n} \, . \, \mathbf{v}) \, \mathbf{n} \right) = 0 ;$$

ossia, sviluppando e semplificando,

$$a \operatorname{div} [\mathbf{u}] \, . \, \mathbf{n} + (a + b) (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \, \mathbf{n} + b \, \mathbf{v} + b \, \mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} = 0 .$$

La moltiplicazione scalare per $\mathbf{n}$ dà (¹)

$$(a + 2b) (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = - a \operatorname{div} [\mathbf{u}] ;$$

e quella vettoriale

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{v} = \mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = - \tfrac{1}{2} (\operatorname{rot} [\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} =$$
$$= - \tfrac{1}{2} (\operatorname{rot} [\mathbf{u}] \times \mathbf{n}) \, \mathbf{n} + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} [\mathbf{u}] .$$

Da queste due si trae $\mathbf{v}$, e precisamente

$$\mathbf{v} = - \frac{a}{a + 2b} \operatorname{div} [\mathbf{u}] \, . \, \mathbf{n} + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} [\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n} .$$

Così, per la (9), la discontinuità di $\dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{M}}$ resta definita; e però anche quelle separatamente della pura deformazione e della rotazione.

(¹) Si ricordi che

$$\mathrm{D} \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} = \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} - \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} [\mathbf{u}] \wedge \mathbf{n} \quad \text{e} \quad \frac{d[\mathbf{u}]}{d\mathrm{P}} \mathbf{n} = 0 .$$