ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIII.

1916

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1916

Matematica. — *Deduzione geometrica dei metodi di approssimazione delle radici reali di una equazione.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio E. D'Ovidio.

1. Ad alcuni metodi di approssimazione delle radici reali di una equazione reale

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

si suol pervenire anche con considerazioni geometriche più o meno semplici; queste però variano passando da un metodo all'altro.

Scopo di questa Nota è di porre tutti i metodi di approssimazione sotto una nuova ed unica veste geometrica, che è molto semplice ed ha inoltre il vantaggio di condurre in modo affatto spontaneo ed intuitivo ad una nota classificazione dei metodi stessi.

2. Per fissare le idee supporremo di voler cercare metodi atti a fornire successioni di numeri crescenti tendenti ad una radice reale r di (1), conoscendo un numero a_0 minore di r, tale che nell'intervallo (a_0, r) la funzione $f(x)$ sia continua e non si annulli che nell'estremo superiore r.

Geometricamente detto: la curva C di equazione cartesiana

$$y = f(x) \tag{2}$$

incontri l'asse delle x sul punto R di ascissa r; vogliamo cercare successioni di punti di questo asse

$$A_0, A_1, A_2, \ldots \tag{3}$$

che si avvicinino ad R dalla sinistra (cfr. la figura) e tendano ad R (essendo A_0 il punto di ascissa a_0).

Se l'arco P_0R di C è tutto contenuto nell'angolo A_0RQ_0 di 45°; ossia, *se ciascuna ordinata dell'arco* P_0R *è positiva e minore della distanza del suo piede dal punto* R, allora, partendo dal punto A_0, si ottiene una delle suddette successioni (3) mediante la costruzione chiaramente indicata nella figura, ove: ciascun punto A_n $(n > 0)$ dista dal precedente A_{n-1} di $f(a_{n-1})$, cioè dell'ordinata della curva C corrispondente al punto A_{n-1}. Ciò è intuitivo.

Del resto lo si vede subito osservando che le ascisse $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di questi punti sono crescenti e non superiori ad r, e perciò tendono ad un limite non maggiore di r; inoltre sono legate dalla relazione

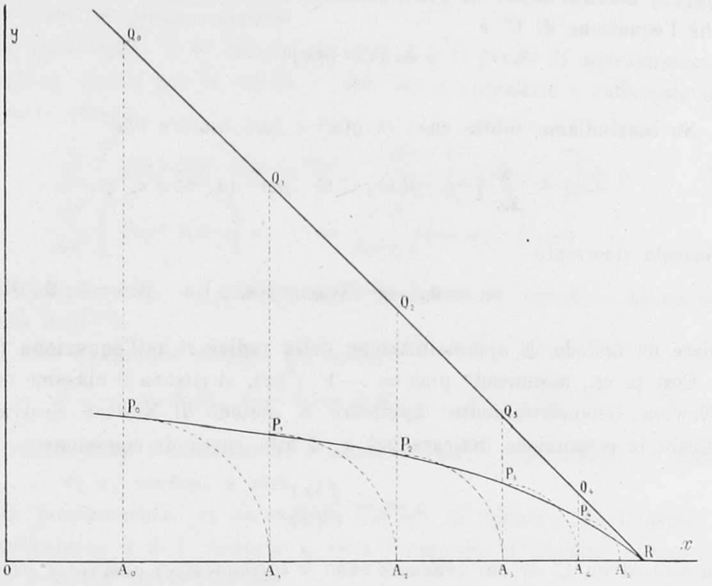
$$a_n = a_{n-1} + f(a_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

che dà, per la supposta continuità di $f(x)$,

$$f(\lim a_{n-1}) = \lim a_n - \lim a_{n-1} = 0\,,$$

onde $\lim a_{n-1} = r$ per $n = +\infty$.

Per verificare se la condizione imposta all'arco P_0R è oppur no soddisfatta, occorrerebbe conoscere proprio il punto R che si vuole approssimare. La trasformeremo perciò in un'altra più restrittiva, ma verificabile in pratica.



Incominciamo con l'osservare che la suddetta condizione può anche esprimersi dicendo che: tutte le corde P_0R, P_1R, ... debbono formare col verso positivo dell'asse x angoli compresi fra 0° e —45°.

Ora, *se ammettiamo che esista la tangente in ogni punto dell'arco* P_0R, cioè che *la funzione* $f(x)$ *ammetta la derivata prima* $f'(x)$ *in ogni punto di* (a_0, r), ognuna di dette corde sarà parallela ad una almeno delle dette tangenti (come è ben noto). Ne segue che, affinchè la suddetta condizione sia soddisfatta, *basta* ammettere che *tutte codeste tangenti formino con l'asse delle* x *un angolo compreso fra* 0° *e* — 45° (0° *escluso*), cioè che sia

$$(5) \qquad -1 \leq f'(x) < 0 \quad \text{in} \quad (a_0, r)\,.$$

Concludendo: *se la* $f(x)$ *è positiva per* $a_0 \leq x < r$, *e se la* (5) *è soddisfatta, la* (4) *fornisce un metodo di approssimazione della radice* r *dell'equazione* (1).

3. Nulla muta nel nostro ragionamento e nella conclusione se, in luogo di applicare la costruzione suindicata giovandoci della curva C, ci serviamo di qualsiasi altra curva C′ che soddisfi alle condizioni imposte a C, cioè che sia dotata di tangente, che giaccia nell'angolo A_0RQ_0 e incontri il segmento A_0R nel solo estremo R.

Le ordinate dei punti di C′ si possono pensare come dedotte da quelle $f(x)$ dei punti corrispondenti di C accorciandole o allungandole in modo opportuno, ossia moltiplicandole per un coefficiente $g(x)$, funzione di x, *che in* (a_0, r) *abbia il segno di* $f(x)$, *ammetta derivata* $g'(x)$ *e non si annulli*; sicchè l'equazione di C′ è

$$y = f(x)\, g(x) \,. \tag{6}$$

Ne concludiamo subito che: *se* $g(x)$ *è tale inoltre che*

$$-1 \leq \frac{d}{dx}\left[f(x)\, g(x)\right] < 0 \quad per \quad a_0 \leq x < r \,, \tag{7}$$

la formola ricorrente

$$a_n = a_{n-1} + f(a_{n-1})\, g(a_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

fornisce un metodo di approssimazione della radice r dell'equazione (1).

Così p. es., assumendo $g(x) = -1 : f'(x)$, si ritrova il classico metodo di Newton. Geometricamente: applicare il metodo di Newton equivale ad applicare la costruzione indicata nel n. 2 alla curva di equazione

$$y = -\frac{f(x)}{f'(x)} \,,$$

ossia *alla curva* C′ *le cui ordinate sono le sottonormali cambiate di segno della curva data* (2).

Otteniamo così una interpretazione geometrica diversa da quella ben nota.

4. Ad ogni curva C′, ossia ad ogni funzione $g(x)$, corrisponde un metodo di approssimazione per la radice r.

Anzi, se prescindiamo dalle condizioni imposte ad $f(x)$ e a $g(x)$ per conseguire la praticità dei risultati, si può dire che, variando C′, si ottengono *tutti* i metodi possibili. Perchè, data una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di numeri crescenti tendente ad r, e quindi una successione di punti come la (3), noi possiamo immaginarla come dedotta applicando la costruzione data nel n. 2 ad una curva C′ che passi pel punto R e pei punti

$$P_n(a_n, a_{n+1} - a_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

e giaccia nell'angolo A_0RQ_0.

Fra tutti codesti infiniti metodi quello, per dir così, *ideale* si otterrebbe assumendo come curva C′ la stessa retta RQ_0: perchè, applicando ad essa la costruzione indicata nel n. 2, *si cadrebbe addirittura nel punto* R con la prima operazione, cioè A_1 cadrebbe in R. Ma noi non sappiamo costruire questa retta, perchè non conosciamo il punto R.

È però intuitivo che un metodo è tanto più conveniente quanto più esso si avvicina al metodo ideale, ossia quanto meno la curva C′ differisce dalla retta RQ_0 in un intorno sinistro di R; e quindi che un metodo che corrisponde ad una curva C′ *tangente* ad RQ_0 in R, è più conveniente che ogni altro metodo. È intuitivo inoltre che esso sarà tanto più conveniente quanto più intimo sarà il contatto di C′ e RQ_0, ossia quanto maggiore sarà l'*ordine* di questo contatto.

Se quest'ordine è k, diremo che $k+1$ è il *grado di approssimazione* del metodo stesso per la radice r. Per ciò è necessario e sufficiente che, per $x=r$, risulti

$$\frac{d}{dx}\Big[\,f(x)\,g(x)\,\Big]=-1\quad,\quad \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\Big[\,f(x)\,g(x)\,\Big]\neq 0$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\Big[\,f(x)\,g(x)\,\Big]=\cdots=\frac{d^k}{dx^k}\Big[\,f(x)\,g(x)\,\Big]=0\,.$$

Giungiamo così, con considerazioni geometriche intuitive, ad un concetto già noto ([1]).

5. Con qualunque metodo, gli errori

$$r-a_0=A_0R\,,\; r-a_1=A_1R\,,\ldots,\; r-a_nR\,,\ldots,$$

che si commettono fermandosi ai successivi valori approssimati in difetto $a_0, a_1, \ldots$ di r, tendono a zero.

Più precisamente: *in un metodo che per la radice r ha il grado di approssimazione* $k+1$, *tendono a zero i rapporti di ciascun errore alla potenza k-esima del precedente.*

Infatti, poichè per un tal metodo la curva C′ ha un contatto di ordine k con la tangente nel punto R, il segmento P_nQ_n è infinitesimo di ordine k rispetto a P_nR o a O_nR, o infine a A_nR (che sono dello stesso ordine), sicchè

$$\lim_{n=\infty}\frac{P_nQ_n}{A_nR^k}=0\,;$$

ma

$$P_nQ_n=A_nQ_n-A_nP_n=A_nR-A_nA_{n+1}=A_{n+1}R\,,$$

quindi

$$\lim_{n=\infty}\frac{A_{n+1}R}{A_nR^k}=0\,.$$

([1]) Cfr. E. Netto, *Vorlesungen über Algebra*, I B., pag. 300 (Leipzig 1890); oppure Schroeder, *Ueber unendliche viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen* (Math. Annalen, 2 B., 1870, pag. 317).